① Phương trình

② Bất phương trình

③ Hệ phương trình

④ Hệ bất phương trình

Mũ & Logarit

Ths.Lê Văn Đoàn

Bài 1. **Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2002**

Giải các phương trình và bất phương trình sau

1/ $2\log_5 x - \log_x 125 < 1 \quad (1)$

2/ $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0 \quad (2)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải bất phương trình : $2\log_5 x - \log_x 125 < 1 \quad (1)$

- Điều kiện : $0 < x \neq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 2\log_5 x - \frac{1}{\log_{125} x} - 1 < 0 \Leftrightarrow 2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_5 x \neq 0 \\ \dfrac{2t^2 - t - 3}{t} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_5 x \\ t < -1 \vee 0 < t < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x < -1 \\ 0 < \log_5 x < \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{5} \\ 1 < x < 5\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \left(1; 5\sqrt{5}\right)$.

2/ Giải phương trình : $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0 \quad (2)$

- Điều kiện : $x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right)$.

$$(2) \Leftrightarrow \left(2^{x-\sqrt{x^2-5}}\right)^2 - 6.2^{x-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{x-\sqrt{x^2-5}} > 0 \\ t^2 - 6.t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 2 \\ 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{x^2-5} = 1 \\ x - \sqrt{x^2-5} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-5} = x - 1 \\ \sqrt{x^2-5} = x - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 5 = (x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 5 = (x-2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \dfrac{9}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{9}{4} \end{array}\right. .$$

- Kết hợp với điều kiện, phương trìn có hai nghiệm là $x = \frac{9}{4};\ x = 3$.

Bài 2. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Tĩnh khối A, B năm 2002**

Giải bất phương trình : $2^{\left(\log_2 x\right)^2} + x^{\log_2 x} \leq 4 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0 \Rightarrow$ tập xác định : $D = \left(0; +\infty\right)$.

- Đặt $\log_2 x = t \Leftrightarrow x = 2^t$. Lúc đó :

$$(*) \Leftrightarrow 2^{t^2} + \left(2^t\right)^t \leq 4 \Leftrightarrow 2^{t^2} + 2^{t^2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{t^2} \leq 2^1 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$$

- Với $t = \log_2 x \Rightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(0; +\infty\right)$.

Bài 3. **Cao đẳng Sư Phạm Nha Trang năm 2002**

Giải phương trình : $\left(x+1\right)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0 \Rightarrow$ Tập xác định $D = \left(0;+\infty\right)$.
- Đặt $t = \log_3 x$ và do $x > 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0$. Lúc đó : $\left(*\right) \Leftrightarrow \left(x+1\right)t^2 + 4xt - 16 = 0$.
- Lập $\Delta' = 4x^2 + 16x + 16 = 4\left(x+2\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4\left(x+2\right)^2} = 2\left(x+2\right), \quad \left(\text{do } x > 0\right)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2x + 2\left(x+2\right)}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} \\ t = \dfrac{-2x - 2\left(x+2\right)}{x+1} = -4 \end{array}\right..$$

- Với $t = -4 \Rightarrow \log_3 x = -4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{81}$.
- Với $t = \dfrac{4}{x+1} \Rightarrow \log_3 x = \dfrac{4}{x+1} \quad \left(1\right)$

  Nhận thấy phương trình $\left(1\right)$ có một nghiệm là $x = 3$.

  Hàm số $f\left(x\right) = \log_3 x$: là hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

  Hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{4}{x+1}$ có $g'\left(x\right) = \dfrac{-4}{\left(x+1\right)^2} < 0, \forall x \Rightarrow g\left(x\right)$: nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

  Vậy phương trình $\left(1\right)$ có một nghiệm duy nhất là $x = 3$.
- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm là $x = \dfrac{1}{81}$, $x = 3$.

Bài 4. **Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Hải Dương năm 2002**

Giải bất phương trình : $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 4x^2 + 2x.2^{x^2} + 3.2^{x^2} - x^2.2^{x^2} - 8x - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x.2^{x^2} - 8x\right) + \left(3.2^{x^2} - 12\right) + \left(4x^2 - x^2.2^{x^2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(2^{x^2} - 4\right) + 3\left(2^{x^2} - 4\right) - x^2\left(2^{x^2} - 4\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2} - 4\right)\left(2x + 3 - x^2\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) = \left(2^{x^2} - 4\right)\left(x^2 - 2x - 3\right) < 0 \quad \left(1\right)$$

- Cho $\begin{cases} 2^{x^2} - 4 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x = -1 \vee x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = -1 \vee x = 3 \end{cases}$.
- Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

$2^{x^2}-4$	+	0	−	‖	−	0	+	‖	+
x^2-2x-3	+	‖	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

- Dựa vào bảng xét, tập nghiệm của bất phương trình là : $x\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(\sqrt{2};3\right)$.

Bài 5. **Cao đẳng khối T, M năm 2004 – Đại học Hùng Vương**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)}=3+2.(xy)^{\log_2 3} & (1)\\ x^2+y^2=3x+3y+6 & (2)\end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $xy>0$.

$(1)\Leftrightarrow 3^{2.\log_2(xy)}-2.3^{\log_2(xy)}-3=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=3^{\log_2 xy}>0\\ t^2-2t-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3^{\log_2(xy)}=-1\ (L)\\ t=3^{\log_2(xy)}=3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\log_2(xy)=1\Leftrightarrow xy=2\quad(3)$.

$(2)\Leftrightarrow(x+y)^2-3(x+y)-2xy-6=0\Leftrightarrow(x+y)^2-3(x+y)-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=5\\ x+y=-2\end{array}\right.\ (4)$.

$(3),(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=2\\ x+y=5\end{cases}\\ \begin{cases}xy=2\\ x+y=-2\end{cases}(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\ -x^2+5x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\\ y=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$.

Bài 6. **Cao đẳng Sư Phạm Hải Phòng – Đại học Hải Phòng năm 2004**

1/ Giải phương trình : $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+4)=\log_2(3-x)\quad(*)$

2/ Giải phương trình : $\log_3\left(x^2+2x+1\right)=\log_2\left(x^2+2x\right)\quad(**)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải phương trình : $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2+\log_{\frac{1}{2}}(x+4)=\log_2(3-x)\quad(*)$

- Điều kiện : $\begin{cases}x-1\neq0\\ x+4>0\\ 3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\ x>-4\\ x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<3\\ x\neq1\end{cases}$.

$(*)\Leftrightarrow\log_2|x-1|-\log_2(x+4)=\log_2(3-x)\Leftrightarrow\log_2|x-1|=\log_2(3-x)(x+4)$

$\Leftrightarrow|x-1|=(3-x)(x+4)\Leftrightarrow|x-1|=-x^2-x+12$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - x + 12 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = -x^2 - x + 12 \\ x - 1 = x^2 + x - 12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{14} \ \vee \ x = -1 - \sqrt{14} \\ x = -\sqrt{11} \ \vee \ x = \sqrt{11} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{11} \\ x = -1 + \sqrt{14} \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là : $x = -\sqrt{11} \ \vee \ x = -1 + \sqrt{14}$.

2/ Giải phương trình : $\log_3\left(x^2 + 2x + 1\right) = \log_2\left(x^2 + 2x\right) \quad (**)$

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^2 + 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + 1\right)^2 > 0 \\ x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(0; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(0; +\infty\right)$.

- Đặt : $\log_3\left(x^2 + 2x + 1\right) = \log_2\left(x^2 + 2x\right) = t \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 3^t > 0 \\ x^2 + 2x = 2^t > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3^t - 1 \\ x^2 + 2x = 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2^t \\ 3^t - 1 = 2^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2^t \\ 2^t + 1 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 2^t & (1) \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + \left(\dfrac{1}{3}\right)^t = 1 & (2) \end{cases}.$$

- Nhận thấy $t = 1$ là một nghiệm của phương trình (2).

- Xét hàm số $f\left(t\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + \left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$:

$f'\left(t\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\ln\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^t.\ln\dfrac{1}{3} < 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Do đó, $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

- Thay $t = 1$ vào (2), ta được : $x^2 + 2x = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Bài 7. **Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ – Mẫu Giáo TWI năm 2004**

Giải bất phương trình : $\log_{\left(x-1\right)^2}\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < \left(x - 1\right)^2 \ne 1 \Leftrightarrow x \ne 0, 1, 2$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_{|x-1|}\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{|x-1|}\dfrac{1}{4} > \log_{|x-1|}\left|x - 1\right| \quad (**)$

- Nếu $\left|x - 1\right| > 1$ thì $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4} > \left|x - 1\right| \\ \left|x - 1\right| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x - 1\right| > 1 \\ \left|x - 1\right| < \dfrac{1}{4} \end{cases}$ (vô lí) $\Rightarrow$ Không có x thỏa.

- Nếu $0 < \left|x - 1\right| < 1$ thì

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4} < \left|x - 1\right| \\ 0 < \left|x - 1\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \left|x - 1\right| < 1 \\ \left|x - 1\right| < \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \left|x - 1\right| < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{4} < x < 2 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0;\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4};2\right)$.

Bài 8. **Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2004**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_2\left(x^2+y^2\right)=5 \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ x>0, y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=32 \\ \log_2 x+\log_2 y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=32 \\ \log_2(xy)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=32 \\ xy=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=64 \\ xy=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ xy=16 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-8 \\ xy=16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=4 \\ x=y=-4 \end{array}\right.$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của hệ là $S=(x;y)=\left\{(4;4)\right\}$.

Bài 9. **Cao đẳng Sư Phạm Bắc Ninh năm 2004**

Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1}>0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x>-3 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

- Trường hợp 1. Nếu $x+1<0 \Leftrightarrow -3<x<-1$.

$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3<0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3)-2\log_2(x+3)<0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3)-2\log_2 3.\log_3(x+3)<0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3).\left(3-2\log_2 3\right)<0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3)>0 \quad \left(\text{Do : } 3-2\log_2 3<0\right)$

$\Leftrightarrow x+3>1 \Leftrightarrow -2<x<-1$ thỏa mãn điều kiện : $-3<x<-1$.

- Trường hợp 2. Nếu $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2-\log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3>0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3)-2\log_2(x+3)>0$

$\Leftrightarrow 3\log_3(x+3)-2\log_2 3.\log_3(x+3)>0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3).\left(3-2\log_2 3\right)>0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+3)<0 \quad \left(\text{Do : } 3-2\log_2 3<0\right)$

$\Leftrightarrow x+3<1 \Leftrightarrow x<-2$ không thỏa mãn điều kiện $x>-1$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-2;-1\right)$.

Bài 10. **Cao đẳng Sư Phạm Bình Phước năm 2004**

Giải phương trình : $3x^2 - 2x^3 = \log_2\left(x^2+1\right) - \log_2 x \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- **Điều kiện :** $x>0$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{x^2+1}{x} = 3x^2 - 2x^3 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 3x^2 - 2x^3 \quad \left(**\right)$

- Ta có $\forall x>0 : x + \dfrac{1}{x} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \geq \log_2 2 = 1$.

  Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \ \left(L\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$.

- Xét hàm số $y = 3x^2 - 2x^3$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$:

  $y' = 6x - 6x^2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1$.

  Mà $\begin{cases} f\left(0\right) = 0 \\ f\left(1\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{\left(0;+\infty\right)} y = 1 \Rightarrow y = 3x^2 - 2x^3 \leq 1$. Dấu " = " xảy ra khi $x=1$.

- Tóm lại : $\left(**\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \geq 1 & \left(1\right) \\ 2x^2 - 2x^3 \leq 1 & \left(2\right) \\ \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 3x^2-2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow$ Dấu " = " trong $\left(1\right),\left(2\right)$ đồng thời xảy ra

  $\Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 11. **Cao đẳng Sư Phạm Kom Tum năm 2004**

Giải phương trình : $\log_5 x.\log_3 x = \log_5 x + \log_3 x \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_5 x.\log_3 x - \log_5 x - \dfrac{\log_5 x}{\log_5 3} = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - 1 - \dfrac{1}{\log_5 3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - \log_3 3 - \log_3 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x.\left(\log_3 x - \log_3 15\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 0 \\ \log_3 x - \log_3 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=15 \end{array}\right.$.

Bài 12. **Cao đẳng Giao Thông năm 2004**

Giải bất phương trình : $\sqrt{8+2^{1+x}-4^x} + 2^{1+x} > 5 \quad \left(1\right)$

Bài giải tham khảo

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \sqrt{8+2.2^x-\left(2^x\right)^2} > 5-2.2^x \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ \sqrt{8+2t-t^2} > 5-2.t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ 5-2t < 0 \\ 8+2t-t^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ 5-2t \geq 0 \\ 8+2t-t^2 > \left(5-2t\right)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ t > \dfrac{5}{2} \\ -2 \leq t \leq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ t \leq \dfrac{5}{2} \\ 1 < t < \dfrac{17}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{2} < t \leq 4 \\ 1 < t \leq \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < t \leq 4 \,.$$

- Thay $t = 2^x$ vào ta được : $1 < 2^x \leq 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0;2\right]$.

Bài 13. **Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp II năm 2004**

Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_2^2 x+3}{\log_2 x+3} > 2 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq \log_2 2^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{8} \end{cases}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x+3}{\log_2 x+3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}{\log_2 x+3} > 0 \quad \left(**\right)$$

- Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $\left(**\right) \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t-3}{t+3} > 0 \Leftrightarrow f\left(t\right) = \dfrac{\left(t+1\right)\left(t-3\right)}{t+3} > 0 \quad \left(***\right)$.
- Xét dấu $f\left(t\right) = \dfrac{\left(t+1\right)\left(t-3\right)}{t+3}$:

t	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$f\left(t\right)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Kết hợp bảng xét dấu và $\left(***\right)$, ta được :

$$\left[\begin{array}{l} -3 < t < -1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{2} \\ x > 8 \end{array}\right. .$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 14. **Cao đẳng Cơ Khí Luyện Kim năm 2004**

Giải phương trình : $\log_2\left(25^{x+3}-1\right)=2+\log_2\left(5^{x+3}+1\right) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases}25^{x+3}-1>0\\5^{x+3}+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25^{x+3}>25^{o}\\5^{x+3}+1>0\ (Đ),\forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3.$

$(*) \Leftrightarrow \log_2\left(25^{x+3}-1\right)=\log_2 4+\log_2\left(5^{x+3}+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(25^{x+3}-1\right)=\log_2\left[4.\left(5^{x+3}+1\right)\right] \Leftrightarrow 25^{x+3}-1=4.5^{x+3}+4$

$\Leftrightarrow \left(5^{x+3}\right)^2-4.5^{x+3}-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^{x+3}=-1\quad (L)\\5^{x+3}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=-2$.

Bài 15. **Cao đẳng Hóa Chất năm 2004**

Giải phương trình : $\log_2\left(2^x+1\right).\log_2\left(2^{x+1}+2\right)=6 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\log_2\left[2.\left(2^x+1\right)\right]=6$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\left[1+\log_2\left(2^x+1\right)\right]-6=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=\log_2\left(2^x+1\right)>0\\t\left(1+t\right)-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t>0\\t^2+t-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t>0\\t=2\vee t=-3\left(L\right)\end{cases} \Leftrightarrow t=2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right)=2 \Leftrightarrow 2^x+1=4 \Leftrightarrow 2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3.$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\log_2 3$.

Bài 16. **Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp khối A năm 2004**

Giải phương trình : $3^{2x+5}-36.3^{x+1}+9=0$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 27.3^{2(x+1)}-36.3^{x+1}+9=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=3^{x+1}>0\\27t^2-36t+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=3^{x+1}>0\\t=1\vee t=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x+1}=1\\3^{x+1}=3^{-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right..$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-2$ và $x=-1$.

Bài 17. **Cao đẳng Công Nghiệp Hà Nội năm 2004**

1/ Giải phương trình : $8^{\sin^3 x}=8.8^{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin^2 x} \quad (1)$

2/ Tìm tập xác định của hàm số : $y=\sqrt{4\log_2 x-\left(\log_2\dfrac{1}{x}\right)^2-3}+\sqrt{x^2-7x+6} \quad (2)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải phương trình : $8^{\sin^3 x} = 8.8^{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin^2 x} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 8^{\sin^3 x} = 8^{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2 x+1} \Leftrightarrow 8^{\sin^3 x} = 8^{\sin^2 x+\sin x+2} \Leftrightarrow \sin^3 x = \sin^2 x + \sin x + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x,\ |t| \le 1 \\ t^3 - t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$ (loại).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2/ Tìm tập xác định của hàm số : $y = \sqrt{4\log_2 x - \left(\log_2 \frac{1}{x}\right)^2 - 3} + \sqrt{x^2 - 7x + 6} \quad (2)$

$(2) \Leftrightarrow y = \sqrt{4\log_2 x - \log_2^2 x - 3} + \sqrt{x^2 - 7x + 6}$.

- Hàm số xác định khi và chỉ khi : $\begin{cases} x > 0 \\ -\log_2^2 x + 4\log_2 x - 3 \ge 0 \\ x^2 - 7x + 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \le 1 \vee x \ge 6 \\ 1 \le \log_2 x \le 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1 \ \vee \ x \ge 6 \\ 2 \le x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \le x \le 8$.

- Vậy tập xác định của hàm số là $D = [6;8]$.

Bài 18. **Cao đẳng Tài Chính Kế Toán IV năm 2004**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \le 0 & (1) \\ (2+x).3^x < 1 & (2) \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow -4 \le x \le -1 \Rightarrow x \in [-4;-1]$.

$(2) \Leftrightarrow x + 2 < \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Với $x \in [-4;-1]$. Xét hàm số $f(x) = x + 2$ đồng biến trên $[-4;-1]$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;-1]} f(x) = f(-1) = 1$.

- Với $x \in [-4;-1]$. Xét hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $[-4;-1]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-4;-1]} g(x) = f(-1) = 3$.

- Nhận thấy $\max\limits_{[-4;-1]} f(x) < \min\limits_{[-4;-1]} g(x)$, $(1 < 3)$ nên $g(x) > f(x)$ luôn luôn đúng $\forall x \in [-4;-1]$. Do đó tập nghiệm của bất phương trìn là $x \in [-4;-1]$.

Bài 19. **Cao đẳng Y Tế Nghệ An năm 2004**

Giải phương trình : $\log_3 \dfrac{3}{x}.\log_2 x - \log_3 \dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $x > 0$.

$(*) \Leftrightarrow (\log_3 3 - \log_3 x).\log_2 x - \left(\log_3 x^3 - \log_3 \sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 x$

$\Leftrightarrow (1 - \log_3 x).\log_2 x - \left(3\log_3 x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x.\log_3 x - 3\log_3 x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x.\log_3 x - 3\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - 6\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - \dfrac{6.\log_2 x}{\log_2 3} = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\left[1 - 2\log_3 x - 6\log_3 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_3 x = \dfrac{1}{2} - 3\log_3 2 = \log_3 \sqrt{3} - \log_3 8 = \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \end{array}\right..$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1,\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

<u>Bài 20.</u> Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp I năm 2006

Giải phương trình : $\log_x 4.\log_2 \dfrac{5 - 12x}{12x - 8} = 2 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{5 - 12x}{12x - 8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{5}{12} < x < \dfrac{2}{3} \end{cases}.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}.\log_2 \dfrac{5 - 12x}{12 - 8} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{5 - 12x}{12 - 8} = \log_2 x \Leftrightarrow \dfrac{5 - 12x}{12 - 8} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{5}{6} \end{array}\right..$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1}{2}$.

<u>Bài 21.</u> Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp II năm 2006

Giải phương trình : $4^{2x^2} - 2.4^{x^2 + x} + 4^{2x} = 0 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 4^{2x^2 - 2x} - 2.4^{x^2 - x} + 1 = 0$ (chia hai vế cho $4^{2x} > 0$)

$$\Leftrightarrow \left(4^{x^2-x}\right)^2 - 2.4^{x^2-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4^{x^2-x} > 0 \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm : $x = 0,\ x = 2$.

Bài 22. **Cao đẳng Xây Dựng số 2 năm 2006**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2^x + \log_2 y + 2^x \log_2 y = 5 \\ 4^x + \log_2^2 y = 5 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $y > 0$.
- Đặt $u = 2^x,\ v = \log_2 y$. Lúc đó :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u+v) + 2uv = 10 \\ (u+v)^2 - 2uv = 5 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} (u+v)^2 + 2(u+v) - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = -5 \\ uv = 10 \end{cases} (VN_o) \\ \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x = 1 \\ \log_2 y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x = 2 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

- So với điều kiện, nghiệm của hệ phương trình là : $S = (x;y) = \{(2;4),(4;2)\}$.

Bài 23. **Cao đẳng Giao Thông Vận Tải III khối A năm 2006**

Giải phương trình : $3 + \dfrac{1}{\log_{32} x} = \log_x\left(\dfrac{89x}{2} - \dfrac{25}{2x}\right) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- ĐK : $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{89x}{2} - \dfrac{25}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \dfrac{89x^2 - 25}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{\sqrt{89}} < x < 0 \\ \dfrac{5}{\sqrt{89}} < x < +\infty \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in \left(\dfrac{5}{\sqrt{89}}; +\infty\right) \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3 + \log_x 32 = \log_x \frac{89x^2 - 25}{2x} \Leftrightarrow \log_x x^3 + \log_x 32 = \log_x \frac{89x^2 - 25}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \log_x 32x^3 = \log_x \frac{89x^2 - 25}{2x} \Leftrightarrow 32x^3 = \frac{89x^2 - 25}{2x} \Leftrightarrow 64x^4 - 89x^2 + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = \dfrac{25}{64} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm \dfrac{5}{8} \end{array}\right.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là : $x = \dfrac{5}{8}$.

Bài 24. **Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại khối A, D năm 2006**

1/ Giải phương trình : $2\ln x + \ln(2x-3)^2 = 0 \qquad (1)$.

2/ Giải bất phương trình : $\dfrac{4^x + 2^x - 2}{4^x - 2^x - 2} > 0$.

Bài giải tham khảo

1/ Giải phương trình : $2\ln x + \ln(2x-3)^2 = 0 \qquad (1)$.

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow 2\ln x + 2\ln|2x-3| = 0 \Leftrightarrow x|2x-3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ -2x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = \dfrac{1}{2} \vee x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.

2/ Giải bất phương trình : $\dfrac{4^x + 2^x - 2}{4^x - 2^x - 2} > 0 \quad (*)$.

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(2^x+2)(2^x-1)}{(2^x+1)(2^x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2^x - 1}{2^x - 2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x < 1 \\ 2^x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right..$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Bài 25. Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối A năm 2006

Giải phương trình : $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x = x - 1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} - \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1} + x + 1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} + 2x \qquad (1)$$

(1) có dạng $f(x+1) = f(2x) \qquad (2)$

- Xét hàm số $f(t) = \left(\sqrt{2}+1\right)^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{t}.\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+1>0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (3).

- Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow x+1=2x \Leftrightarrow x=1$.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 26. **Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối B năm 2006**

Giải phương trình : $5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}+\log_5 \sin x}=15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\cos x} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\sin x>0,\ \cos x>0$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{5}+\sqrt{5}.5^{\log_5 \sin x}=\sqrt{15}.15^{\log_{15}\cos x} \Leftrightarrow \sqrt{5}+\sqrt{5}.\sin x=\sqrt{15}.\cos x$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x=\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \ \vee\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Bài 27. **Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối D1, M năm 2006**

Giải phương trình : $\log_9 x=\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải phương trình : $\log_9 x=\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \quad (*)$

- Điều kiện : $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt{2x+1}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

$(*) \Leftrightarrow \log_3\sqrt{x}=\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2x+1}-1 \Leftrightarrow x=2x+2-2\sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x^2+4x+4=8x+4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=4$.

Bài 28. **Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khối A năm 2006**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}+7.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0 \\ \lg\left(3x-y\right)+\lg\left(y+x\right)-4\lg 2=0 \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 3x-y>0 \\ y+x>0 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{y}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{y}{3}>0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7.\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}} - 6 = 0 \\ \lg(3x-y)(y+x) = \log 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 + 7t - 6 = 0, \quad t = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}} > 0 \\ (3x-y)(y+x) = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}} = \dfrac{2}{3} \vee t = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}} = -3 \ (L) \\ 2xy + 3x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2xy + 3x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x(2x-2) + 3x^2 - (2x-2)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 3x^2 + 4x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ x = -\dfrac{10}{3} \quad (L) \end{array}\right.$$

- Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (2;2)$.

Bài 29. **Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khối D năm 2006**

Giải phương trình : $9^x + 6^x = 2^{2x+1} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 9^x + 6^x - 2.4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \ (L) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Bài 30. **Cao đẳng Sư Phạm TW năm 2006**

Giải phương trình : $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 4.2^{2x} - 18.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 4t^2 - 18t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Bài 31. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối A năm 2006**

Giải bất phương trình : $3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} - 1 \geq 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Ta có : $(*) \Leftrightarrow 3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} \geq 1 \quad (1)$
- Nếu $|x| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-4} \geq 1 \\ (x^2-4).3^{x-2} \geq 0 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} 3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} \geq 1$

Do đó (1) luôn đúng với $|x| \ge 2$ hay $x \in (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$ là tập nghiệm của bất phương trình.

- Nếu $|x| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-4} < 1 \\ (x^2-4).3^{x-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} < 1$

Do đó (1) không có tập nghiệm (vô nghiệm) khi $|x| < 2$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$.

Bài 32. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối M năm 2006**

Giải bất phương trình : $3^{x+2} + 9^{x+1} - 4 > 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 9.3^x + 9.9^x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t > 0 \\ 9t^2 + 9t - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t > 0 \\ t > \dfrac{1}{3} \vee t < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t > 0 \\ t > \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3^x > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x > 3^{-1} \Leftrightarrow x > -1$.

- Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in (-1;+\infty)$.

Bài 33. **Dự bị – Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối A năm 2006**

Giải phương trình : $4^{\sqrt[3]{x+5}+1} + 2.2^{\sqrt[3]{x+5}+x} = 2.4^x \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{4^{\sqrt[3]{x+5}+1}}{4^x} + \dfrac{2.2^{\sqrt[3]{x+5}+x}}{2^{2x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 4.4^{\sqrt[3]{x+5}-x} + 2.2^{\sqrt[3]{x+5}-x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4.2^{2\left(\sqrt[3]{x+5}-x\right)} + 2.2^{\sqrt[3]{x+5}-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x+5}-x} = t > 0 \\ 4t^2 + 2t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt[3]{x+5}-x} = t = \dfrac{1}{2} = 2^{-1} \\ 2^{\sqrt[3]{x+5}-x} = t = -1 \ (L) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} - x = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5} = x - 1 \Leftrightarrow x + 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

- Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

Bài 34. **Cao đẳng Kỹ Thuật Y Tế I năm 2006**

Giải phương trình : $1 + \log_2(9^x - 6) = \log_2(4.3^x - 6) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 9^x - 6 > 0 \\ 4.3^x - 6 > 0 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2(9^x - 6) = \log_2(4.3^x - 6) \Leftrightarrow \log_2[2.(9^x - 6)] = \log_2(4.3^x - 6)$

$$\Leftrightarrow 2.9^x - 12 = 4.3^x - 6 \Leftrightarrow 2.\left(3^x\right)^2 - 4.3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 \quad (\mathrm{L}) \\ 3^x = 3^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

- Thay $x = 1$ vào điều kiện và thỏa điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Bài 35. **Cao đẳng Tài Chính – Hải Quan khối A năm 2006**

Giải bất phương trình : $\log_3 \dfrac{3x-5}{x+1} < 1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\dfrac{3x-5}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > \dfrac{5}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x+1} < 3 \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-8}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

Bài 36. **Cao đẳng Kỹ Thuật Cao Thắng năm 2006**

Giải phương trình : $\log_2\left(x^2 - 3\right) - \log_2\left(6x - 10\right) + 1 = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 \frac{2\left(x^2-3\right)}{6x-10} = \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-3\right)}{6x-10} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Bài 37. **Cao đẳng Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2006**

Giải phương trình : $x^{2+\log_2^2 x} = 8 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0$ và $x \neq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow 2 + \log_2^2 x = \log_x 8 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3.\log_x 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3.\frac{1}{\log_2 x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^3 x + 2\log_2 x - 3\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Bài 38. **Cao đẳng Điện Lực Tp. Hồ Chí Minh năm 2006**

Giải phương trình : $\dfrac{3}{4}\log_x 3 - 3\log_{27} x = 2\log_3 x \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x \neq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{4}.\frac{1}{\log_3 x} - \log_3 x - 2\log_3 x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}.\frac{1}{\log_3 x} = 3.\log_3 x \Leftrightarrow \log_3^2 x = \frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \ \vee\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \ \vee\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{3} \ \vee\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 39. **Cao đẳng Kinh Tế – Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006**

Giải bất phương trình : $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\frac{x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \ \vee\ x > 2$.

$(*) \Leftrightarrow \log_3 \frac{x-2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (2;+\infty)$.

Bài 40. **Cao đẳng Kinh Tế – Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối D1 năm 2006**

Giải phương trình : $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) = 1 + \log_4 \frac{1}{x} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

$(*) \Leftrightarrow -\log_4(x-3) - \log_4 \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \log_4 \frac{x-3}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 4$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 4$.

Bài 41. **Cao đẳng Công Nghiệp Hà Nội năm 2005**

Giải bất phương trình : $5^{(\log_5 x)^2} + x^{\log_5 x} \le 10 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0$.
- Đặt $\log_5 x = t \Rightarrow x = 5^t$.

$(*) \Leftrightarrow 5^{t^2} + (5^t)^t \le 10 \Leftrightarrow 5^{t^2} \le 5 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \log_5 x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le x \le 5$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[\frac{1}{5};5\right]$.

Bài 42. **Cao đẳng Kinh Tế – Kỹ Thuật Công Nghiệp I khối A năm 2005**

Tìm tập xác định của hàm số : $y = \sqrt{\log_{\sqrt{5}}\left(x^2 - \sqrt{5}.x + 2\right)}$.

Bài giải tham khảo

- Hàm số được xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{5}.x + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \log_{\sqrt{5}}\left(x^2 - \sqrt{5}.x + 2\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}.x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \vee\ x \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

- Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; +\infty\right)$.

Bài 43. **Cao đẳng Sư Phạm Cà Mau khối B năm 2005**

Giải phương trình : $x^{\lg x} = 10^{2\lg^2 x - 3\lg x + 2} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0$

$(*) \Leftrightarrow \lg x^{\lg x} = \lg 10^{2\lg^2 x - 3\lg x + 2} \Leftrightarrow \lg^2 x = 2\lg^2 x - 3\lg x + 2 \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 100 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 10 \vee x = 100$.

Bài 44. **Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc khối B năm 2006**

Giải phương trình : $\log_{0,5}^2 x + \log_2 x^2 = \log_x 4x \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x \neq 1$.

$(*) \Leftrightarrow \left[-\log_2 x\right]^2 + 2\log_2 x = \log_x 4 + \log_x x$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x - \frac{1}{\log_4 x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t = 1 \vee t = -1 \vee t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 2$.

Bài 45. **Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc khối A năm 2006**

Giải bất phương trình : $\log_4\left(3^x - 1\right).\log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $3^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 1 \Leftrightarrow x > 0$.

$(*) \Leftrightarrow \log_4\left(3^x - 1\right).\left[-\log_4\left(3^x - 1\right) + \log_4 16\right] - \frac{3}{4} \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\log_4^2\left(3^x-1\right)+2\log_4\left(3^x-1\right)-\frac{3}{4}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_4\left(3^x-1\right) \\ 4t^2-8t+3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_4\left(3^x-1\right) \\ t<\dfrac{1}{2}\vee t>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4\left(3^x-1\right)<\dfrac{1}{2} \\ \log_4\left(3^x-1\right)>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(0;1\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

Bài 46. **Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_2 x+3\sqrt{5-\log_3 y}=5 \\ 3\sqrt{\log_2 x-1}-\log_3 y=-1 \end{cases}\quad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x>0,\ y>0 \\ 5-\log_3 y\ge 0 \\ \log_2 x-1\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0,\ y>0 \\ \log_3 y\le 5 \\ \log_2 x\ge 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0,\ y>0 \\ y\le 162 \\ x\ge 2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 2 \\ 0<y\le 162 \end{cases}.$

- Đặt : $\begin{cases} a=\sqrt{5-\log_3 y}\ge 0 \\ b=\sqrt{\log_2 x-1}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=5-\log_3 y \\ b^2=\log_2 x-1 \end{cases}.$

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases} b^2+1+3a=5 \\ 3b+a^2-5=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2+3a=4 \\ a^2+3b=4 \end{cases}\Leftrightarrow b^2+3a=a^2+3b\Leftrightarrow b^2-a^2+3a-3b=0$$

$$\Leftrightarrow\left(b-a\right)\left(b+a\right)-3\left(b-a\right)=0\Leftrightarrow\left(b-a\right)\left(b+a-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a^2+3a-4=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=3-a \\ a^2+9-3a=3 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a=1\vee a=-4\ \left(L\right) \end{cases} \\ \begin{cases} b=3-a \\ a^2-3a+6=0\left(VN\right) \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases} a=\sqrt{5-\log_3 y}=1 \\ b=\sqrt{\log_2 x-1}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 5-\log_3 y=1 \\ \log_2 x-1=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \log_3 y=4 \\ \log_2 x=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=3^4=81 \\ x=4 \end{cases}.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(4;81\right)\right\}$.

Bài 47. **Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2006**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3^{-x}.2^y=1152 \\ \log_{\sqrt{5}}\left(x+y\right)=2 \end{cases}\quad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x+y>0$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases} 3^{-x}.2^y=1152 \\ \log_5\left(x+y\right)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3^{-x}.2^y=1152 \\ x+y=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=5-x \\ 3^{-x}.2^{5-x}=1152 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=5-x \\ 2^5.6^{-x}=1152 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 6^{-x} = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

- So với điều kiện, nghiệm của hệ là $S = \left(x; y\right) = \left\{\left(-2; 3\right)\right\}$.

Bài 48. **Cao đẳng Du Lịch Hà Nội khối A năm 2006**

Giải phương trình : $\log_3\left(8 - x + \sqrt{x^2 + 9}\right) = 2 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $8 - x + \sqrt{x^2 + 9} > 0$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 8 - x + \sqrt{x^2 + 9} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

- Thay nghiệm $x = 4$ vào điều kiện và thỏa điều kiện. Vậy nghiệm phương trình là $x = 4$.

Bài 49. **Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Nghệ An khối A năm 2006**

Giải phương trình : $\log_3\left(3^x + 1\right).\log_3\left(3^{x+1} + 3\right) = 2$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_3\left(3^x + 1\right).\log_3\left[3.\left(3^x + 1\right)\right] = 2 \Leftrightarrow \log_3\left(3^x + 1\right).\left[1 + \log_3\left(3^x + 1\right)\right] = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_3\left(3^x + 1\right) \\ t.\left(t + 1\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_3\left(3^x + 1\right) \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_3\left(3^x + 1\right) \\ t = 1 \vee t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3\left(3^x + 1\right) = 1 \\ \log_3\left(3^x + 1\right) = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x + 1 = 3 \\ 3^x + 1 = 3^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 2 \\ 3^x = -\dfrac{8}{9} \quad \left(L\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_3 2.$$

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = \log_3 2$.

Bài 50. **Cao đẳng Sư Phạm Quãng Ngãi năm 2006**

Giải phương trình : $8^x + 18^x = 2.27^x \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0 \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0 \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

- Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 0$.

Bài 51. **Cao đẳng Cộng Đồng Hà Tây năm 2005**

Giải bất phương trình : $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} \le 0 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 81.9^{x} + 45.6^{x} - 36.4^{x} \le 0 \Leftrightarrow 81.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 45.\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 36 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} > 0 \\ 81t^2 + 45t - 36 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ -1 \le t \le \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \le \frac{4}{9} \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{x} < \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow x \le \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} \Leftrightarrow x \le -2.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty; -2\right]$.

Bài 52. **Cao đẳng Sư Phạm Lai Châu khối A năm 2005**

Giải phương trình : $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left(x+2\right)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)^3 + \log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)^3 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} \left(x+2\right)^2 > 0 \\ \left(4-x\right)^3 > 0 \\ \left(x+6\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 2 \\ -6 < x < 4 \end{cases}.$

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}}\left|x+2\right| - 3.\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4} = 3\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right) + 3\log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(4\left|x+2\right|\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)\left(x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left|x+2\right| = \left(4-x\right)\left(x+6\right) \Leftrightarrow 4\left|x+2\right| = -x^2 - 2x + 24$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x + 8 = -x^2 - 2x + 24 \\ x + 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + 8 = x^2 + 2x - 24 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 6x - 16 = 0 \\ x \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 32 = 0 \\ x < -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \vee x = -8 \\ x \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{33} \\ x < -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 - \sqrt{33} \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2 \ \vee \ x = 1 - \sqrt{33}$.

Bài 53. **Cao đẳng Sư Phạm Lai Châu khối B năm 2005**

Giải bất phương trình : $\log_2\left(x+1\right) + \log_{\left(x+1\right)} 2 \ge \frac{5}{2} \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x + 1 \ne 1 \Leftrightarrow -1 < x \ne 0$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2\left(x+1\right) + \frac{1}{\log_2\left(x+1\right)} - \frac{5}{2} \ge 0 \quad \left(**\right)$$

- Đặt $t = \log_2\left(x+1\right)$. Khi đó : $\left(**\right) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} \ge 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le \dfrac{1}{2} \\ t \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x+1\right) \le \dfrac{1}{2} \\ \log_2\left(x+1\right) \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 \le \sqrt{2} \\ x+1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \sqrt{2}-1 \\ x \ge 3 \end{array}\right. .$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm phương trình là : $x \in \left(-1;\sqrt{2}-1\right) \cup \left(3;+\infty\right) \setminus \left\{0\right\}$.

Bài 54. **Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2005**

Giải bất phương trình : $\log_x\left(5x^2-8x+3\right) > 2 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 0 < x \ne 1 \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1 \\ x < \dfrac{3}{5} \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0;\dfrac{3}{5}\right) \cup \left(1;+\infty\right)$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(0;\dfrac{3}{5}\right) \\ 5x^2-8x+3 < x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(1;+\infty\right) \\ 5x^2-8x+3 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(0;\dfrac{3}{5}\right) \\ x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(1;+\infty\right) \\ x \in \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right) \\ x \in \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right) \end{array}\right. .$$

- Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Bài 55. **Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối B năm 2001**

Giải bất phương trình : $\log_{\left(1-x^2\right)}\left(1-x\right) \ge 1 \qquad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x^2 > 0 \\ 1-x^2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left(-1;1\right) \setminus \left\{0\right\}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_{\left(1-x^2\right)}\left(1-x\right) \ge \log_{\left(1-x^2\right)}\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow \left(1-x^2-1\right)\left(1-x-1+x^2\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-x\right) \le 0 \Leftrightarrow x^2 - x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$$

- Kết hợp với tập xác định, tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(0;1\right)$.

Bài 56. **Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001**

Giải phương trình : $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2} \qquad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left(0;+\infty\right)$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x} - 6^{\log_2 x} - 2.3^{2\log_2 2x} = 0 \Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x} - 6^{\log_2 x} - 2.9^{1+\log_2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x} - 6^{\log_2 x} - 18.9^{\log_2 x} = 0 \Leftrightarrow 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} - 18.\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}\right]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18t^2 + t - 4 = 0 \\ t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{4}{9} & (N) \\ t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = -\frac{1}{2} & (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{4}$.

Bài 57. **Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001**

Giỉa và biện luận phương trình : $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Đặt : $\begin{cases} a = x^2 + 2mx + 2 \\ b = x^2 + 2mx + m \end{cases}$. Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow 5^a - 5^{a+b} = b \quad (**)$.
- Ta có : $\begin{cases} b > 0 \Rightarrow 5^a - 5^{a+b} < 0 \\ b < 0 \Rightarrow 5^a - 5^{a+b} > 0 \end{cases}$. Do đó : $(**) \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0$.
- Lập $\Delta' = m^2 - m$.
- Trường hợp 1 : $\Delta' = m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: Phương trình vô nghiệm.
- Trường hợp 2 : $\Delta' = m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \vee m > 1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt : $x_1 = -m - \sqrt{m^2 - m}, \quad x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m}$.
- Trường hợp 3 : $\Delta' = m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 : \text{Phương trình có 1 nghiệm } x = 0. \\ m = 1 : \text{Phương trình có 1 nghiệm } x = -1. \end{array}\right.$

Bài 58. **Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 2001**

Cho phương trình : $2\log_4\left(2x^2 - x + 2m - 4m^2\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + mx - 2m^2\right) = 0 \quad (*)$. Xác định tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa : $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \log_2\left(2x^2 - x + 2m - 4m^2\right) = \log_2\left(x^2 + mx - 2m^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x = 2m \ \vee \ x = 1 - m \end{cases}.$$

- Để $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa : $x_1^2 + x_2^2 > 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2m, \ x_2 = 1 - m \\ x_1^2 + x_2^2 > 1 \\ x_1^2 + mx_1 - 2m^2 > 0 \\ x_2^2 + mx_2 - 2m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 > 0 \\ -2m^2 - m + 1 > 0 \\ 5m^2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 < m < \frac{1}{2} \\ m < 0 \vee m > \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

- Vậy $m \in \left(-1;0\right) \cup \left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{2}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 59. **Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001**

Tìm m để bất phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \le m.\log_2\left(2+\sqrt{4-x}\right)$ $\left(*\right)$ có nghiệm.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \\ x + 12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left[0;4\right]$.
- Ta có : $\forall x \in \left[0;4\right]$ thì $\log_2\left(2+\sqrt{4-x}\right) \ge \log_2 2 = 1 > 0$.
- Lúc đó: $\left(*\right) \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\log_2\left(2+\sqrt{4-x}\right)} \le m$.
- Mặt khác : $\forall x \in \left[0;4\right]$ thì $\begin{cases} f\left(x\right) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} : \text{ đạt min là } f\left(0\right) = 2\sqrt{3}. \\ g\left(x\right) = \log_2\left(2+\sqrt{4-x}\right) : \text{ đạt max là } g\left(0\right) = 2. \end{cases}$
- Do đó : $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ đạt min là $\dfrac{f\left(0\right)}{g\left(0\right)} = \sqrt{3} \Rightarrow \left(1\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge \sqrt{3}$.

Bài 60. **Đại học Cần Thơ năm 2001**

Xác định của mọi giá trị của tham số m để hệ sau 2 nghiệm phân biệt :

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}\left(x+1\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(x-1\right) > \log_3 4 & \left(1\right) \\ \log_2\left(x^2-2x+5\right) - m\log_{x^2-2x+5} 2 = 5 & \left(2\right) \end{cases}$$

Bài giải tham khảo

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2\log_3\left(x+1\right) - 2\log_3\left(x-1\right) > 2\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_3\dfrac{x+1}{x-1} > \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x+1}{x-1} > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{3-x}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

- Đặt $y = x^2 - 2x + 5$ và xét hàm $y = x^2 - 2x + 5$ trên $\left(1;3\right)$.

 Ta có : $y' = 2x - 2$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$		
y		4	$\nearrow$	8	

- Do đó : $\forall x \in \left(1;3\right) \Rightarrow y \in \left(4;8\right)$.

- Đặt $t = \log_2\left(x^2 - 2x + 5\right)$.

  Ta có : $y = x^2 - 2x + 5 \in \left(4;8\right) \Rightarrow t = \log_2\left(x^2 - 2x + 5\right) \in \left(2;3\right)$.

$\left(2\right) \Leftrightarrow t - \dfrac{m}{t} = 5 \Leftrightarrow f\left(t\right) = t^2 - 5t = m \quad \left(*\right),\ \forall t \in \left(2;3\right)$.

- Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 - 5t$ trên khoảng $\left(2;3\right)$.

  $f'\left(t\right) = 2t - 5$. Cho $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$.

  Bảng biến thiên

t	$-\infty$	2		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$		
$f(t)$		-6	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	-6	

- Dựa vào bảng biến thiên, hệ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{25}{4} < m < -6$.

<u>Bài 61.</u> Đại học Đà Nẵng khối A, B đợt 1 năm 2001

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_x\left(6x + 4y\right) = 2 \\ \log_y\left(6y + 4x\right) = 2 \end{cases} \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0,\ x \ne 1 \\ y > 0,\ y \ne 1 \end{cases}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = x^2 & \left(1\right) \\ 6y + 4x = y^2 & \left(2\right) \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} 2\left(x - y\right) = \left(x - y\right)\left(x + y\right) \Leftrightarrow \left(x - y\right)\left(x + y - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = 2 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 6x + 4y = x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 - x \\ 6x + 4y = x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ y = 0 \vee y = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 - x \\ x = -4 \vee x = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 10 \\ x = 2,\ y = 0 \\ x = -4,\ y = 6 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của hệ là $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(10;10\right)\right\}$.

<u>Bài 62.</u> Đại học Đà Nẵng khối A đợt 2 năm 2001

Tìm m để bất phương trình được nghiệm đúng $\forall x$: $\log_m\left(x^2 - 2x + m + 1\right) > 0 \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_m\left(x^2 - 2x + m + 1\right) > \log_m 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < m < 1\\ x^2 - 2x + m + 1 < 1\end{cases}\\ \begin{cases}m > 1\\ x^2 - 2x + m + 1 > 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < m < 1\\ x^2 - 2x + m < 0\end{cases}\\ \begin{cases}m > 1\\ x^2 - 2x + m > 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < m < 1\\ a = 1 < 0 \ (\text{Sai})\\ \Delta' < 0\end{cases}\\ \begin{cases}m > 1\\ a = 1 > 0\\ \Delta' = 1 - m < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m > 1.$$

- Vậy bất phương trình có nghiệm đúng $\forall x \Leftrightarrow m > 1$.

Bài 63. **Đại học Sư Phạm Vinh khối A, B năm 2001**

Giải phương trình : $\log_4\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).\log_5\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases}x - \sqrt{x^2 - 1} > 0\\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0\\ x^2 - 1 \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

$$(*) \Leftrightarrow \log_4 20.\log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).\log_5\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).\left[\log_4 20.\log_5\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0\\ \log_4 20.\log_5\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x - \sqrt{x^2 - 1} = 1\\ \log_5\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \dfrac{1}{\log_4 20} = \log_{20} 4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2 - 1} = x - 1\\ x + \sqrt{x^2 + 1} = 5^{\log_{20} 4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x - 1 \ge 0\\ x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1\end{cases}\\ \sqrt{x^2 + 1} = 5^{\log_{20} 4} - x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 1\\ x = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 5^{\log_{20} 4} = a\\ x^2 + 1 = a^2 - 2ax + x^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ 2ax = a^2 - 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = \dfrac{1}{2a}\left(a^2 - 1\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = \dfrac{1}{2.5^{\log_{20} 4}}\left(25^{\log_{20} 4} - 1\right)\end{array}\right..$$

- So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm là : $x = 1 \vee x = \dfrac{1}{2.5^{\log_{20} 4}}\left(25^{\log_{20} 4} - 1\right)$.

Bài 64. **Đại học Thủy Lợi năm 2001**

Giải phương trình : $2^{x-1} - 2^{x^2 - x} = \left(x - 1\right)^2 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 2^{x-1} - 2^{x^2 - x} = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} + \left(x - 1\right) = 2^{x^2 - x} + \left(x^2 - x\right) \quad (1)$$

- Nhận thấy (1) có dạng : $f\left(x - 1\right) = f\left(x^2 - x\right) \quad (2)$

- Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$:

  $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\quad (3)$

- Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Bài 65. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 2001

Giải phương trình : $\log_3\left(\dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = x^2 + 3x + 2 \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + 3\right) + \log_3\left(x^2 + x + 3\right) = \left(2x^2 + 4x + 5\right) + \log_3\left(2x^2 + 4x + 5\right) \quad (1)$

- Phương trình (1) có dạng : $f\left(x^2 + x + 3\right) = f\left(2x^2 + 4x + 2\right) \qquad (2)$

- Xét hàm số : $f(t) = t + \log_3 t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

  Ta có : $f'(t) = \left(1 + \dfrac{1}{t\ln 3}\right) > 0,\ \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$: đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \quad (3)$

- Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

- Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -2 \vee x = -1$.

Bài 66. Đại học Nông Nghiệp I khối B năm 2001

Giải phương trình : $\log_{x^2}(2 + x) + \log_{\sqrt{x+2}} x = 2 \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x \neq 1$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_x(2 + x) + \log_{\sqrt{x+2}} x = 2 \Leftrightarrow \log_x \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\log_x \sqrt{x+2}} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_x \sqrt{x+2} \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \log_x \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Bài 67. Đại học Luật Hà Nội – Đại học Dược Hà Nội năm 2001

Giải phương trình : $(x + 1)\log_{\frac{1}{2}}^2 x + (2x + 5).\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \geq 0 \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0 \Rightarrow$ Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow (x + 1)\log_2^2 x - (2x + 5)\log_2 x + 6 \geq 0 \qquad (1)$.

- Đặt $t=\log_2 x$. Lúc đó : $(1)\Leftrightarrow (x+1).t^2-(2x+5).t+6\ge 0 \quad (2)$

- Lập $\Delta=(2x+5)^2-24(x+1)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$.

$\Rightarrow t_1=\dfrac{2x+5+2x-1}{2(x+1)}=2 \ \vee\ t_2=\dfrac{2x+5-2x+1}{2(x+1)}=\dfrac{3}{x+1}$.

- Xét $t_1-t_2=2-\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t_1-t_2	$+$	0		$-$	0	$+$	

- Nếu $0<x\le \dfrac{1}{2}\Rightarrow t_1-t_2<0\Leftrightarrow t_1<t_2$, lúc đó tập nghiệm của (2) là :

$$\left[\begin{array}{l} t=\log_2 x\le t_1 \\ t=\log_2 x\ge t_2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x\le 2 & (a) \\ \log_2 x\ge \dfrac{3}{x+1} & (b)\end{array}\right.$$

Do đó, khi $0<x\le\dfrac{1}{2}$ thì (a) thỏa, (b) không thỏa nên tập nghiệm (2) là $\left(0;\dfrac{1}{2}\right] \quad (3)$

- Nếu $x>\dfrac{1}{2}\Rightarrow t_1-t_2>0\Leftrightarrow t_2<t_1$, lúc đó tập nghiệm của (2) là

$$\left[\begin{array}{l} t=\log_2 x\ge t_1 \\ t=\log_2 x\le t_2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x\ge 2 \\ \log_2 x\le \dfrac{3}{x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ \dfrac{1}{2}<x\le 2\end{array}\right.$$

Do đó, khi $x>\dfrac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (2) là $\left(\dfrac{1}{2};2\right]\cup[4;+\infty) \quad (4)$

- Từ $(3),(4)\Rightarrow$ Tập nghiệm của phương trình là : $x\in(0;2]\cup[4;+\infty)$.

<u>Bài 68.</u> **Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2001**

Giải và biện luận bất phương trình : $\log_a \log_{a^2} x+\log_{a^2}\log_a x\ge \dfrac{1}{2}\log_a 2 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $x>0$.
- Cơ số a phải thỏa mãn điều kiện : $0<a\ne 1$.

$(*)\Leftrightarrow \log_a\left(\dfrac{1}{2}.\log_a x\right)+\dfrac{1}{2}\log_a\log_a x\ge\dfrac{1}{2}\log_a 2$

$\Leftrightarrow \log_a\dfrac{1}{2}+\log_a\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a\log_a x\ge\dfrac{1}{2}\log_a 2$

$\Leftrightarrow -\log_a\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\log_a\log_a x\ge\dfrac{1}{2}\log_a 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\log_a\log_a x\ge\dfrac{3}{2}\log_a 2$

$\Leftrightarrow \log_a \log_a x \ge \log_a 2 \qquad (**)$

- Nếu $0 < a < 1 : (**) \Leftrightarrow 0 < \log_a x \le 2 \Leftrightarrow a^2 \le x < 1$.
- Nếu $a > 1 : (**) \Leftrightarrow \log_a x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge a^2$.

Bài 69. **Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 2001**

Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho bất phương trình sau được nghiệm đúng $\forall x \le 0$:

$a.2^{x+1} + (2a+1).\left(3-\sqrt{5}\right)^x + \left(3+\sqrt{5}\right)^x < 0 \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

$(*) \Leftrightarrow (2a+1).\left(3-\sqrt{5}\right)^x + \left(3+\sqrt{5}\right)^x + 2a.2^x < 0$

$$\Leftrightarrow (2a+1).\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + 2a < 0 \quad (1)$$

- Nhận xét : $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1^x = 1$. Do đó, khi đặt

  $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Do $x \le 0 \Rightarrow 0 < t \le 1$.

$(1) \Leftrightarrow (2a+1).\frac{1}{t} + t + 2a < 0,\ \forall t \in (0;1]$

$\Leftrightarrow t^2 + 2at + 2a + 1 < 0,\ \forall t \in (0;1]$

$\Leftrightarrow 2a(t+1) < -t^2 - 1,\ \forall t \in (0;1]$

$$\Leftrightarrow 2a < \frac{-t^2-1}{t+1} = f(t),\ \forall t \in (0;1] \quad (2)$$

- Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2-1}{t+1}$ trên nửa khoảng đoạn $(0;1]$.

  Ta có : $f'(t) = \frac{-t^2-2t+1}{(t+1)^2}$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}-1 \ \vee\ t = -\sqrt{2}-1$.

  Bảng xét dấu

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}-1$	0		$\sqrt{2}-1$		1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0		$+$	0	$-$		
$f(t)$			-1	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	-1	

- Dựa vào bảng biến thiên và $(2) \Rightarrow 2a \le -1 \Leftrightarrow a \le -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 70. **Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 2001**

Giải phương trình : $\log_{(3x+7)}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases}1\neq 3x+7>0\\1\neq 2x+3>0\\9+12x+4x^2>0\\6x^2+23x+21>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\neq x>-\dfrac{7}{3}\\-1\neq x>-\dfrac{3}{2}\\(2x+3)>0\\(2x+3)(3x+7)>0\end{cases} \Leftrightarrow -1\neq x>-\dfrac{3}{2}$.

$(*)\Leftrightarrow \log_{(3x+7)}(2x+3)^2+\log_{(2x+3)}(2x+3)(3x+7)=4$

$\Leftrightarrow 2\log_{(3x+7)}(2x+3)+\log_{(2x+3)}(2x+3)+\log_{(2x+3)}(3x+7)=4$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=\log_{(3x+7)}(2x+3)\\2t+\dfrac{1}{t}-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\log_{(3x+7)}(2x+3)\\2t^2-3t+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\log_{(3x+7)}(2x+3)=1\\t=\log_{(3x+7)}(2x+3)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+3=3x+7\\2x+3=\sqrt{3x+7}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4 \quad (L)\\ \begin{cases}2x+3\geq 0\\9+12x+4x^2=3x+7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$.

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{4}$.

Bài 71. Đại học Thủy Sản năm 1999

Giải bất phương trình : $\log_2\left(7.10^x-5.25^x\right)>2x+1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $7.10^x-5.25^x>0\Leftrightarrow 7.10^x>5.25^x\Leftrightarrow \left(\dfrac{10}{25}\right)^x>\dfrac{5}{7}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{10}{25}}\dfrac{5}{7}$.

$(*)\Leftrightarrow 7.10^x-5.25^x>2^{2x+1}\Leftrightarrow 7.10^x-5.25^x-2.4^x>0\Leftrightarrow 7.\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-5.\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\right]^2-2>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x>0\\-5t^2+7t-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x>0\\ \dfrac{2}{5}<t<1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}<\left(\dfrac{5}{2}\right)^x<1\Leftrightarrow -1<x<0$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x\in(-1;0)$.

Bài 72. Đại học Quốc Gia Hà Nội – khối B năm 1999

Giải bất phương trình : $\log_2\left(\dfrac{x^2+8x-1}{x+1}\right)\leq 2 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+8x-1}{x+1} > 0 \\ \dfrac{x^2+8x-1}{x+1} \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4-\sqrt{17} < -1 \\ x > -4+\sqrt{17} \end{array}\right. \\ \dfrac{x^2+4x-5}{x+1} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4-\sqrt{17} < -1 \\ x > -4+\sqrt{17} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -5 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4-\sqrt{17} < x \le -5 \\ -4+\sqrt{17} < x \le 1 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(-4-\sqrt{17};-5\right] \cup \left(-4+\sqrt{17};1\right)$.

Bài 73. **Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 1999**

Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \ge -1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow -\log_2\left(x^2-3x+2\right) \ge 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-3x+2\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 > 0 \\ x^2-3x+2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 2 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < 1 \\ 2 < x \le 3 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[0;1\right) \cup \left(2;3\right]$.

Bài 74. **Đại học Huế khối D – hệ chưa phân ban năm 1999**

Giải phương trình : $\log_4\left(x+2\right).\log_x 2 = 1 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x \ne 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\left(x+2\right).\frac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2\left(x+2\right) = 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2\left(x+2\right) = \log_2 x^2$$

$$\Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình cần tìm là $x = 2$.

Bài 75. **Đại học Huế khối D – Hệ chuyên ban năm 1999**

Giải phương trình : $x^2\log_x 27.\log_9 x = x+4 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $0 < x \ne 1$.

$$(*) \Leftrightarrow x^2.\log_9 x.\log_x 27 = x+4 \Leftrightarrow x^2\log_9 27 = x+4 \Leftrightarrow x^2.\frac{3}{2} = x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 2 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Bài 76. **Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 1999**

1/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3\left(x-y\right) = 1-\log_3\left(x+y\right) \end{cases} \quad (*)$

2/ Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm đúng $\forall x > 0$:

$\left(3m+1\right).12^x + \left(2-m\right)6^x + 3^x < 0 \quad (**)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3\left(x-y\right) = 1 - \log_3\left(x+y\right) \end{cases} \quad \left(*\right)$

- Điều kiện : $x > y$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 4^{\frac{5}{2}} \\ \log_3\left(x-y\right) + \log_3\left(x+y\right) = \log_3 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \\ \left(x-y\right)\left(x+y\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{y} \\ t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{y} \\ t = \dfrac{1}{2} \vee t = 2 \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{array}\right. \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ x = 2y \end{array}\right. \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -3x^2 = 3 \end{cases} \left(VN\right) \ \vee \ \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1,\ x = -2 \\ y = 1,\ x = 2 \end{array}\right. .$$

- Kết hợp với điều kiện, nghiệm hệ phương trình là $S = \left(x;y\right) = \left\{\left(2;1\right)\right\}$.

2/ Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm đúng $\forall x > 0$:

$\left(3m+1\right).12^x + \left(2-m\right)6^x + 3^x < 0 \qquad \left(**\right)$

$\left(**\right) \Leftrightarrow \left(3m+1\right).4^x + \left(2-m\right)2^x + 1 < 0 \qquad \left(1\right)$

- Đặt $t = 2^x$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$. Lúc đó : $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(3m+1\right).t^2 + \left(2-m\right).t + 1 < 0,\ \forall t > 1$

$$\Leftrightarrow \left(3t^2 - t\right)m < -t^2 - 2t - 1,\ \forall t \in \left(1;+\infty\right) \Leftrightarrow m < \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} = f\left(t\right),\ \forall t \in \left(1;+\infty\right).$$

- Xét hàm số : $f\left(t\right) = \dfrac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Ta có : $f'\left(t\right) = \dfrac{7t^2 + 6t - 1}{\left(3t^2 - t\right)^2} > 0,\ \forall t \in \left(1;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(t)$			$+$
$f(t)$		-2	$-\frac{1}{3}$

- Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $m < -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 77. **Đại học Y Tp. Hồ Chí Minh năm 1999**

Giải phương trình : $\sin^{1999}x + \cos^{1999}x = 1 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \sin^{1999}x - \cos^{1999}x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x\sin^{1997}x - \cos^2 x\cos^{1997}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1 - \sin^{1997}x\right) + \cos^2 x\left(1 - \cos^{1997}x\right) = 0 \quad (1)$$

- Ta có : $\begin{cases} \sin^2 x\left(1 - \sin^{1997}x\right) \geq 0 \\ \cos^2 x\left(1 - \cos^{1997}x\right) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$

- Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x\left(1 - \sin^{1997}x\right) = 0 \\ \cos^2 x\left(1 - \cos^{1997}x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$.

<u>Bài 78.</u> **Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1999**

1/ Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_a\left(35 - x^3\right)}{\log_a\left(5 - x\right)} > 3, \ \left(a > 0, a \neq 1\right)$.

2/ Xác định m để bất phương trình : $4^x - m.2^x + m + 3 \leq 0$ có nghiệm.

<u>Bài giải tham khảo</u>

1/ Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_a\left(35 - x^3\right)}{\log_a\left(5 - x\right)} > 3 \ \ (*), \ \left(a > 0, a \neq 1\right)$.

- Điều kiện : $\begin{cases} 35 - x^3 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{35} \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{35} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left(-\infty; \sqrt[3]{35}\right)$.

$(*) \Leftrightarrow \log_{5-x}\left(35 - x^3\right) > 3 \Leftrightarrow \log_{5-x}\left(35 - x^3\right) > \log_{5-x}\left(5 - x\right) \quad (1)$

- Do $x < \sqrt[3]{35} < 4 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow 5 - x > 5 - 4 \Leftrightarrow a = 5 - x > 1$ nên :

$(1) \Leftrightarrow 35 - x^3 > \left(5 - x\right)^3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

- Kết hợp với tập xác định, tập nghiệm của bất phương trình : $x \in \left(2; 3\right)$.

2/ Xác định m để bất phương trình : $4^x - m.2^x + m + 3 \leq 0 \quad (**)$ có nghiệm.

- Đặt $t = 2^x > 0$. Lúc đó : $(**) \Leftrightarrow t^2 - mt + m + 3 \leq 0, \ \forall t \in \left(0; +\infty\right)$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3 \leq m\left(t - 1\right), \ \forall t \in \left(0; +\infty\right) \Leftrightarrow m \geq \frac{t^2 + 3}{t - 1} = f\left(t\right), \ \forall \ t \in \left(0; +\infty\right) \setminus \left\{1\right\}.$$

- Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{t^2 + 3}{t - 1}$ trên $\left(0; +\infty\right) \setminus \left\{1\right\}$

Ta có : $f'\left(t\right) = \dfrac{t^2 - 2t - 3}{\left(t - 1\right)^2}, \ \forall \ t \in \left(0; +\infty\right) \setminus \left\{1\right\}$. Cho $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 3$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(t)$		-3		$+\infty$		$+\infty$
		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			$-\infty$		6	

- Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm : $m < -3 \vee m \geq 6$.

Bài 79. **Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1998**

Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ $(*)$ khi $m = 5$.

2/ Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho hệ $(*)$ có nghiệm $(x;y)$ thỏa $3x + 2y \leq 5$.

Bài giải tham khảo

1/ Khi $m = 5$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_5(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases} \quad (1)$

- Điều kiện: $\begin{cases} 3x + 2y > 0 \\ 3x - 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x > \dfrac{2}{3}y \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_5(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ \log_5(3x+2y) - \dfrac{\log_5(3x-2y)}{\log_5 3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ \log_5 3.\log_5(3x+2y) - \log_5(3x-2y) = \log_5 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = \dfrac{5}{3x-2y} \\ \log_5 3.\log_5 \dfrac{5}{3x-2y} - \log_5(3x-2y) = \log_5 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ \log_5 3.\left[\log_5 5 - \log_5(3x-2y)\right] - \log_5(3x-2y) = \log_5 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ \log_5 3 - \log_5 3.\log_5(3x-2y) - \log_5(3x-2y) = \log_5 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ (\log_5 3 - 1)\log_5(3x-2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ \log_5(3x-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y) = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

- So với điều kiện, nghiệm của hệ phương trình là $S = (x;y) = \left\{(1;1)\right\}$.

2/ Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho hệ : $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 & (2) \\ \log_m (3x+2y) - \log_3 (3x-2y) = 1 & (3) \end{cases}$

có nghiệm $(x;y)$ thỏa $3x + 2y \le 5$.

- Ta có: $\begin{cases} (3x+2y)(3x-2y) = 5 \\ 3x + 2y \le 5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y \ge 1$.

- Đặt $t = 3x - 2y \Rightarrow 3x + 2y = \dfrac{5}{t}$.

$$(3) \Leftrightarrow \log_m \left(\frac{5}{t}\right) - \log_3 t = 1 \Leftrightarrow \log_m 3.\log_3 \left(\frac{5}{t}\right) = 1 + \log_3 t \Leftrightarrow \log_m 3 = \frac{1 + \log_3 t}{\log_3 \left(\frac{5}{t}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \log_m 3 = \frac{1 + \log_3 t}{\log_3 5 - \log_3 t} \quad (4).$$ Đặt $z = \log_3 t$, $\left(z \ge 0 \text{ do } t = 3x - 2y \ge 1\right)$.

- Lúc đó : $(4) \Leftrightarrow \log_m 3 = \dfrac{z+1}{-z + \log_3 5} = f(z)$, $\forall z \ge 0$ và $z \ne \log_3 5$.

- Xét hàm số : $f(z) = \dfrac{z+1}{-z + \log_3 5}$ trên $[0;+\infty) \setminus \{\log_3 5\}$.

Ta có : $f'(z) = \dfrac{\log_3 5 + 1}{\left(-z + \log_3 5\right)^2} > 0, \forall z \in [0;+\infty) \setminus \{\log_3 5\}$.

Bảng biến thiên

z	$-\infty$	0		$\log_3 5$		$+\infty$
$f'(z)$	0		$+$	‖	$+$	
$f(z)$		$\log_5 3$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

- Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thỏa $3x + 2y \le 5$ thì

$$\left[\begin{array}{l} \log_m 3 \le -1 \\ \log_m 3 \ge \log_5 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\log_3 m} \le -1 \\ \dfrac{1}{\log_3 m} \ge \dfrac{1}{\log_5 3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 m \ge -1 \\ \log_3 m \le \log_3 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1}{3} \\ m \le 5 \end{array}\right..$$

- Vậy giá trị lớn nhất của m là $m = 5$.

Bài 80. **Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1998**

Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases}2x^2-3x+1>0\\2x^2-3x+1\neq 1\\x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\vee x>1\\x\neq 0, x\neq\dfrac{3}{2}\\x>-1\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<\dfrac{1}{2},\ x\neq 0\\x>1,\ x\neq\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{-\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{-\log_3(x+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}}<\frac{1}{\log_3(x+1)}\quad(1)$$

- Dựa vào điều kiện, ta có bảng xét dấu

x		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	
$\log_3(x+1)$	//////		$-$	0	$+$	//////	//////		$+$	$\Vert$	$+$
$\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}$	//////		$+$	0	$-$	//////	//////		$-$	0	$+$

- Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy:
  Nếu $-1<x<0:$ VT > VP $\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.
  Nếu $0<x<\dfrac{1}{2}$: VT < VP $\Rightarrow$ Bất phương trình được thỏa.
  Nếu $1<x<\dfrac{3}{2}$: VT < VP $\Rightarrow$ Bất phương trình được thỏa.

- Nếu $x>\dfrac{3}{2}$ thì

$$(1)\Leftrightarrow\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}>\log_3(x+1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_3\left(2x^2-3x+1\right)>\log_3(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2-3x+1\right)>\log_3(x+1)^2\Leftrightarrow 2x^2-3x+1>(x+1)^2\Leftrightarrow x>5.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\cup(5;+\infty)$.

<u>Bài 81.</u> Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 1998

Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}+\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}>0\quad(1)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases}2x-1>0\\2x-1\neq 1\\\sqrt{x^2-3x+2}>0\\\sqrt{x^2-3x+2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\x\neq 0\\x<1\vee x>2\\x\neq\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow\ x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left[(2;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}\right]$.

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}-\frac{1}{\log_2(2x-1)}>0\Leftrightarrow\frac{\log_2(2x-1)-\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}{\log_2(2x-1).\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}>0$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{\log_2\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}}{\log_2\left(2x-1\right).\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}>0 \quad \left(2\right).$$

- Xét dấu của : $\log_2\left(2x-1\right)$

✧ $\log_2\left(2x-1\right)<0\Leftrightarrow 0<2x-1<1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$.

✧ $\log_2\left(2x-1\right)>0\Leftrightarrow 2x-1>1\Leftrightarrow x>1$.

- Xét dấu của : $\log_2\sqrt{x^2-3x+2}$

✧ $\log_2\sqrt{x^2-3x+2}<0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+2}<1\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

✧ $\log_2\sqrt{x^2-3x+2}>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+2}>1\Leftrightarrow x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

- Xét dấu của : $\log_2\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

✧ $\log_2\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}<0\Leftrightarrow 0<\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}<1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

✧ $\log_2\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}>0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

- Bảng xét dấu của $f\left(x\right)$:

x	$-\infty$ $\quad$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$	$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ $\quad$ 1	1 $\quad$ 2	2 $\quad$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$\log_2\left(2x-1\right)$		$-$	$-$		$+$	$+$
$\log_2\sqrt{x^2-3x+2}$		$-$	$-$		$-$	$+$
$\log_2\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$		$-$	$+$		$+$	$+$
$f\left(x\right)$		$-$	$+$		$-$	$+$

- Do đó, tập nghiệm của $\left(2\right)$ là $x\in\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6};1\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

<u>Bài 82.</u> **Đại học Ngoại Thương khối D năm 1998**

Giải phương trình : $\log_2 x+\log_3 x<1+\log_2 x.\log_3 x \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $x>0\Rightarrow$ Tập xác định : $D=\left(0;+\infty\right)$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - 1 - \log_2 x.\frac{\log_2 x}{\log_2 3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t + \dfrac{t}{\log_2 3} - 1 - \dfrac{t^2}{\log_2 3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ t^2 - \left(1 + \log_2 3\right)t + \log_2 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x \\ \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > \log_2 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 1 \\ \log_2 x > \log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với tập xác định, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0;2\right) \cup \left(3;+\infty\right)$.

Bài 83. Đại học Dân Lập Ngoại Ngữ – Tin Học năm 1998

Giải bất phương trình : $25^{\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}} \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x \ge 0 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left[0;+\infty\right)$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 6.5^{\sqrt{x}} + 5 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^{\sqrt{x}} > 0 \\ t^2 - 6t + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^{\sqrt{x}} > 0 \\ 1 < t < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < t < 5 \Leftrightarrow 1 < 5^{\sqrt{x}} < 5 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(0;1\right)$.

Bài 84. Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông (đề số 2) năm 1998

1/ Hỏi với giá trị nguyên nào của a thì bất phương trình : $2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$ được thỏa mãn với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

2/ Giải phương trình : $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4^x$.

Bài giải tham khảo

1/ Hỏi với giá trị nguyên nào của a thì bất phương trình : $2\log_{\frac{1}{2}} a - 3 + 2x\log_{\frac{1}{2}} a - x^2 < 0$ được thỏa mãn với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

- Điều kiện : $a > 0$.
- Đặt $t = 2\log_{\frac{1}{2}} a$. Khi đó :

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t - 3 + xt - x^2 < 0 \\ t = -2\log_2 a \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - t.x + 3 - t > 0 \\ t = -2\log_2 a \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = t^2 + 4t - 12 < 0 \\ t = -2\log_2 a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < t < 2 \\ t = -2\log_2 a \end{cases} \Leftrightarrow -6 < -2\log_2 a < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < \log_2 a < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 8 \text{ (thỏa điều kiện } a > 0\text{)}.$$

- Thỏa yêu cầu bài toán thì $a \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$.

2/ Giải phương trình : $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4^x \quad (2)$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x = 1 \qquad (3)$$

- Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm phương trình (3).

- Xét hàm số $y = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x$ trên $\mathbb{R}$.

  Ta có : $y' = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^x.\ln\frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^x.\ln\frac{2+\sqrt{3}}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Vế trái là hàm số giảm.

- Còn vế phải $y = 1$ là hàm hằng. Do đó, phương trình (3) có nghiệm duy nhất và nghiệm đó là $x = 1$.

Bài 85. **Đại học Kỹ Thuật Công Nghệ năm 1998**

1/ Giải bất phương trình : $2^x + 2^{3-x} \le 9 \quad (1)$

2/ Giải phương trình : $4\log_9 x + \log_x 3 = 3 \quad (2)$

Bài giải tham khảo

1/ Giải bất phương trình : $2^x + 2^{3-x} \le 9 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow 2^x + \frac{8}{2^x} - 9 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ t^2 - 9t + 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 1 \le t \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le 2^x \le 8 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3.$$

2/ Giải phương trình : $4\log_9 x + \log_x 3 = 3 \quad (2)$

- Điều kiện : $0 < x \ne 1 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = (0;+\infty) \setminus \{1\}$.

$$(2) \Leftrightarrow 2\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_3 x \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_3 x = 1 \\ t = \log_3 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right..$$

- So với tập xác định, nghiệm của phương trình là $x = 3 \vee x = \sqrt{3}$.

Bài 86. **Đại học Hàng Hải năm 1998**

Giải phương trình : $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10.2^{\sqrt{x-2}} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = [2;+\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{\sqrt{x-2}} > 0 \\ t^2 - 10t + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^{\sqrt{x-2}} > 0 \\ t = 8 \vee t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{x-2}} = 8 \\ 2^{\sqrt{x-2}} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 3 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

- So với tập xác định, phương trình có hai nghiệm : $x = 3 \vee x = 11$.

Bài 87. **Đại học Dân Lập Văn Lang năm 1998**

Cho bất phương trình : $9^x - 5m.6^x + 3m.4^x > 0 \quad (*)$

1/ Giải bất phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

<u>Bài giải tham khảo</u>

1/ Với $m = 2$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 9^x - 10.6^x + 6.4^x > 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 10.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0 \\ t^2 - 10t + 6 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < 5 - \sqrt{19} \vee t > 5 + \sqrt{19} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x < 5 - \sqrt{19} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x > 5 + \sqrt{19} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_{\frac{3}{2}}\left(5 - \sqrt{19}\right) \\ x > \log_{\frac{3}{2}}\left(5 + \sqrt{19}\right) \end{array}\right..$$

2/ Tìm m để : $9^x - 5m.6^x + 3m.4^x > 0 \ (*)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

- Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0$. Lúc đó : $(*) \Leftrightarrow t^2 - 5m.t + 3m > 0, \ \forall t > 0$

$$\Leftrightarrow t^2 > m\left(5t - 3\right), \ \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{t^2}{5t - 3} = f\left(t\right), \ \forall t \in \left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right).$$

- Xét hàm số $f\left(t\right) = \frac{t^2}{5t - 3}$ trên $\left(0; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Ta có : $f'\left(t\right) = \frac{5t^2 - 6t}{\left(5t - 3\right)^2}$. Cho $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{6}{5}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		$\frac{3}{5}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(t)$		0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$\frac{12}{25}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m cần tìm là : $0 < m < \frac{12}{25}$.

<u>Bài 88.</u> Đại học Giao Thông Vận Tải năm 1998 – Cao đẳng Sư Phạm Nha Trang năm 2002

Giải bất phương trình : $\left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -3 \end{cases}$.

- Ta có : $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}-3\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{10}+3\right)}=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}+3\right)^{-\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-10}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x<-\sqrt{5} \\ 1<x<\sqrt{5} \end{array}\right..$$

- So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x\in\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bài 89. **Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1998**

Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình : $9^x-2\left(m+1\right).3^x-2m-3>0 \quad \left(*\right)$ luôn có nghiệm đúng với mọi x.

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-2\left(m+1\right).3^x-2\left(m+1\right)-1>0 \Leftrightarrow \left[\left(3^x\right)^2-1\right]-2\left(m+1\right)\left(3^x+1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x-1\right)\left(3^x+1\right)-2\left(m+1\right)\left(3^x+1\right)>0 \Leftrightarrow \left(3^x+1\right)\left(3^x-2m-3\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 3^x-2m-3>0 \Leftrightarrow 3^x>2m-3 \quad \left(**\right)$$

- Để $\left(*\right)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $\left(**\right)$ cũng đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2m-3<0 \ \left(\text{do } 3^x>0\right) \Leftrightarrow m\leq\dfrac{3}{2}$.

- Vậy $m\leq\dfrac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 90. **Đại học Dân Lập Ngoại Ngữ – Tin Học năm 1997**

Biết rằng $x=1$ là 1 nghiệm của bất phương trình : $\log_m\left(2x^2+x+3\right)\leq\log_m\left(3x^2-x\right) \ \left(*\right)$.
Hãy giải bất phương trình này.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 2x^2+x+3>0, \forall x\in\mathbb{R} \\ 3x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

- Vì $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình $\log_m\left(2x^2+x+3\right)\leq\log_m\left(3x^2-x\right)$ nên ta được : $\log_m 6\leq\log_m 2 \Leftrightarrow 0<m<1$.

- Do $0<m<1$ nên : $\left(*\right)\Leftrightarrow 2x^2+x+3\geq 3x^2-x \Leftrightarrow x^2-2x-3\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.

- Kết hợp với điều kiên, tập nghiệm bất phương trình là $x\in\left(1;0\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Bài 91. **Đại học An Ninh – Đại học Cảnh Sát khối A năm 1997**

Tìm miền xác định của hàm số : $y=\sqrt{\log_2\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)}$.

Bài giải tham khảo

- Hàm số xác định khi và chỉ khi : $\begin{cases} 1 \pm x \neq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \dfrac{2x}{1-x^2} - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{1-x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ -1+\sqrt{2} \leq x \leq 1 \ \vee \ -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1 \end{cases}.$$

- Vậy miền xác định của hàm số là $D = \left[-1-\sqrt{2};\ -1\right) \cup \left[-1+\sqrt{2};\ 1\right)$.

<u>Bài 92.</u> Đại học Thủy Sản năm 1997

Giải phương trình : $2^{2x+2} + 3.2^x - 1 = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow 4.\left(2^x\right)^2 + 3.2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 4.t^2 + 3t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ t = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ t = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \quad (L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{17}-3}{4} = \log_2\left(\sqrt{17}-3\right) - 2$$

- Vậy nghiệm phương trình là $x = \log_2\left(\sqrt{17}-3\right) - 2$.

<u>Bài 93.</u> Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1997

Cho bất phương trình : $1 + \log_5\left(x^2+1\right) \geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right) \quad (*)$. Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình được nghiệm đúng với mọi x.

Bài giải tham khảo

$$(*) \Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right] \geq \log_5\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x^2+1\right) \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-4x+5 \geq m\left(x^2+1\right) \\ m\left(x^2+1\right) > -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1} \geq m \quad (1) \\ g(x) = -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)} < m \quad (2) \end{cases}.$$

- Xét hàm số $f(x) = \dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $f'(x) = \dfrac{4x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$

$f'(x)$		+	0	−	0	+			
$f(x)$	↗		14	↘	3	↗			

Dựa vào bảng biến thiên và (1) ta được : $m \le \min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 3 \quad (3)$

- Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = \dfrac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	↗		2	↘	1	↗	

Dựa vào bảng biến thiên và (2) ta được : $m > \max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 2 \quad (4)$.

- Từ $(3),(4)$ ta được: $m \in (2;\ 3]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 94. **Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh – Đại học Kinh Tế khối A năm 1997**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) = 4 & (1) \\ \log_{1+x}(1+2y) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 & (2) \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} 1-2y+y^2 > 0 \\ 1+2x+x^2 > 0 \\ 0 < 1+x \ne 1 \\ 0 < 1-y \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-y)^2 > 0 \\ (1+x)^2 > 0 \\ -1 < x \ne 0 \\ 0 \ne y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y \ne 0 \\ 1+x \ne 0 \\ -1 < x \ne 0 \\ 0 \ne y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 0 \ne y < 1 \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)^2 + \log_{1-y}(1+x)^2 = 4 \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y) + \log_{1-y}(1+x) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_{1+x}(1-y) \\ t + \dfrac{1}{t} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_{1+x}(1-y) \\ t + \dfrac{1}{t} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_{1+x}(1-y) \\ t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t = \log_{1+x}(1-y) = 1 \Leftrightarrow 1-y = 1+x \Leftrightarrow y = -x \quad (3)$

- Thay (3) vào (2) ta được : $\log_{1+x}(1-2x) + \log_{1+x}(1+2x) = 2$

$$\Leftrightarrow \log_{1+x}\left(1-2x\right)\left(1+2x\right)=2 \Leftrightarrow 1-4x^2=\left(1+x\right)^2 \Leftrightarrow 5x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=y \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

- So với điều, nghiệm của hệ là $S=\left(x;y\right)=\left\{\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)\right\}$.

Bài 95. **Đại học Ngoại Thương khối D năm 1997**

Giải phương trình : $2^{x+1}-4^x=x-1 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.
- Đặt $2^x=t>0$. Lúc đó : $\left(*\right) \Leftrightarrow t^2-2t-x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1+\sqrt{2-x} \\ t=1-\sqrt{2-x} \end{array}\right.$.
- Trường hợp 1 : $t=1+\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2^x=1+\sqrt{2-x} \qquad \left(1\right)$

Ta có $\begin{cases} f\left(x\right)=2^x: \text{ Là hàm tăng.} \\ g\left(x\right)=1-\sqrt{2-x}: \text{ Là hàm giảm} \\ f\left(1\right)=g\left(1\right) \end{cases} \Rightarrow \left(1\right)$: có một nghiệm duy nhất là $x=1$.

- Trường hợp 2 : $t=1-\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2^x=1-\sqrt{2-x} \qquad \left(2\right)$

Điều kiện : $\begin{cases} 2-x\geq 0 \\ 1-\sqrt{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 2$.

Ta có : $\forall x\in\left(1;2\right]: \begin{cases} f\left(x\right)=2^x>h\left(1\right)=2 \\ h\left(x\right)=1-\sqrt{2-x}<h\left(2\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \left(2\right)$: Vô nghiệm.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 96. **Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh – Đại học Luật Tp. Hồ Chí Minh năm 1996**

Cho phương trình : $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\tan x}=m \quad \left(*\right)$

1/ Giải phương trình khi $m=6$.

2/ Xác định m để phương trình $\left(*\right)$ có đúng hai nghiệm trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài giải tham khảo

1/ Khi $m=6$ thì $\left(*\right) \Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\tan x}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}>0 \\ t+\dfrac{1}{t}=6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}>0 \\ t^2-6t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}=3+2\sqrt{2} \\ t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}=3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

2/ Tìm m để $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\tan x}=m\ \left(*\right)$ có đúng 2 nghiệm $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

- Ta có $\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\tan x}>0\\t^2-mt+1=0\end{cases}$.
- Do $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\tan x\in\mathbb{R}$.
- Vậy ta cần xác định m để phương trình : $t^2-mt+1=0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\P=1>0\ \left(\text{Đ}\right)\\S=m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2.$$

- Vậy khi $m>2$ thì phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 97. Đại học Ngoại Thương năm 1996

Tìm nghiệm dương của phương trình : $x+x^{\log_2 3}=x^{\log_2 5}\quad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x>0$ (do nghiệm dương).
- Đặt $\log_2 x=t\Rightarrow x=2^t>0$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 2^t+3^t=5^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t=1\quad\left(**\right)$$

- Nhận thấy $t=1$ là một nghiệm của phương trình $\left(**\right)$.
- Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t$

  Ta có : $f'\left(t\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^t\ln\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^t\ln\frac{3}{5}<0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến.

  Mặt khác $y=1$ là hàm hằng số $\left(//\ Ox\right)$.
- Vậy $t=1$ là nghiệm duy nhất của $\left(**\right)\Leftrightarrow x=2^t=2^1=2$ là nghiệm cần tìm của $\left(*\right)$.

Bài 98. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Cho phương trình : $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m\quad\left(*\right)$

1/ Giải $\left(*\right)$ khi $m=4$.

2/ Tìm m để phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm.

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

1/ Khi $m=4$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0 \\ t + \dfrac{1}{t} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0 \\ t^2 - 4t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0 \\ t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1 \vee x = 1$.

2/ Tìm m để phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m \quad (*)$ có hai nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0 \\ t + \dfrac{1}{t} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 - mt + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ S = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \vee m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 .$$

<u>Bài 99.</u> Đại học Quốc Gia Hà Nội – Học Viện Ngân Hàng năm 2000

Giải phương trình: $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} + x.\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 + x^2 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x > 1 \Rightarrow$ Tập xác định $D = \left(1;+\infty\right)$.
- Đặt $\log_2 x = t \Rightarrow x = 2^t \Rightarrow x^2 = 4^t$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)^t + 2^t\left(2-\sqrt{2}\right)^t = 1 + 4^t$$

$$\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)^t + \left[2\left(2-\sqrt{2}\right)\right]^t = 1 + \left[2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\right]^t$$

$$\Leftrightarrow a^t + b^t = 1 + a^t b^t \text{ với } \begin{cases} a = 2+\sqrt{2} \\ b = 2\left(2-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^t - 1\right) + \left(b^t - a^t b^t\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a^t - 1\right) - b^t\left(a^t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a^t - 1\right)\left(1 - b^t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^t = 1 \\ b^t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

- Vậy nghiệm phương trình là $S = \left\{1\right\}$.

<u>Bài 100.</u> Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 2000

Giải phương trình: $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(8.3^x - 24\right) + \left(3.2^x - 2^x.3^x\right) = 0 \Leftrightarrow 8\left(3^x - 3\right) - 2^x\left(3^x - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x - 3\right)\left(8 - 2^x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 3 = 0 \\ 8 - 2^x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

- Vậy nghiệm phương trình là $S = \left\{1;3\right\}$.

<u>Bài 101.</u> Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A – đợt 1 năm 2000

Cho $f\left(x\right) = \left(m-1\right).6^x - \dfrac{2}{6^x} + 2m + 1$.

1/ Giải bất phương trình $f\left(x\right) \ge 0$ với $m = \dfrac{2}{3}$.

2/ Tìm tham số m để $\left(x - 6^{1-x}\right).f\left(x\right) \ge 0,\ \forall x \in \left[0;1\right]$.

<u>Bài giải tham khảo</u>

1/ Giải bất phương trình $f\left(x\right) \ge 0$ với $m = \dfrac{2}{3}$.

- Với $m = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f\left(x\right) = -\dfrac{1}{3}.6^x - \dfrac{2}{6^x} + \dfrac{7}{3} \ge 0 \quad \left(*\right)$
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6^x > 0 \\ -\dfrac{1}{3}t - \dfrac{2}{t} + \dfrac{7}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6^x > 0 \\ t^2 - 7t + 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6^x > 0 \\ 1 \le t \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le 6^x \le 6 \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$$

- Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left[0;1\right]$.

2/ Tìm tham số m để $\left(x - 6^{1-x}\right)\left[\left(m-1\right).6^x - \dfrac{2}{6^x} + 2m + 1\right] \ge 0,\ \forall x \in \left[0;1\right]$.

- Với $m = 1$ thì bất phương trình thỏa mãn không phụ thuộc m, nên ta chỉ cần tìm m để bất phương trình thỏa $\forall x \in \left[0;1\right)$.
- Đặt $g\left(x\right) = x - 6^{1-x}$. Lúc đó cần tìm m để $g\left(x\right).f\left(x\right) \ge 0,\ \forall x \in \left[0;1\right)$.
- Xét hàm số $g\left(x\right) = x - 6^{1-x} = x - 6.\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ trên $\left[0;1\right)$.

  Ta có $g'\left(x\right) = 1 - 6.\left(\dfrac{1}{6}\right)^x \ln\dfrac{1}{6} > 0,\ \forall x \in \left[0;1\right) \Rightarrow$ Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right)$.

  $\Rightarrow \forall x \in \left[0;1\right) : x < 1 \Rightarrow g\left(x\right) < g\left(1\right) \Leftrightarrow g\left(x\right) < 0$.

- Do đó, ta chỉ cần tìm $f\left(x\right) = \left(m-1\right).6^x - \dfrac{2}{6^x} + 2m + 1 \le 0 \quad \left(*\right),\ \forall x \in \left[0;1\right)$.
- Đặt $t = 6^x$. Do $x \in \left[0;1\right) \Rightarrow t \in \left[1;6\right)$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(m-1\right).t - \dfrac{2}{t} + 2m + 1 \le 0,\ \forall t \in \left[1;6\right)$

$$\Leftrightarrow mt + 2m - t - \frac{2}{t} + 1 \le 0,\ \forall t \in \left[1;6\right) \Leftrightarrow m \le \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = h\left(t\right),\ \forall t \in \left[1;6\right).$$

- Xét hàm số $h(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t^2+2t}$ trên $[1;6]$.

Ta có: $h'(t)=\dfrac{3t^2-4t-4}{\left(t^2+2t\right)}$, $\forall t\in[1;6]$. Cho $h'(t)=\dfrac{3t^2-4t-4}{\left(t^2+2t\right)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		1		2		6	$+\infty$
$h'(t)$		0			$-$	0	$+$		
$h(t)$				$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	

- Dựa vào bảng biến thiên, ta được $m\le\dfrac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

<u>Bài 102.</u> Đại học Bách Khoa Hà Nội khối D năm 2000

Giải các phương trình: $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3 \qquad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases}(x+1)^2>0\\ \sqrt{4-x}>0\\ (4+x)^3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1\ne 0\\ 4-x>0\\ 4+x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne -1\\ -4<x<4\end{cases} \Rightarrow$ TXĐ: $D=(-4;4)\setminus\{-1\}$.

$(*)\Leftrightarrow \log_2|x+1|+\log_2 4=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1|=\log_2(4-x)(4+x)\Leftrightarrow 4|x+1|=16-x^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4(x+1)=16-x^2\\ x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}-4(x+1)=16-x^2\\ x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ x=2\ \ (N)\\ x=-6\ \ (L)\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ \left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{24}\ \ (N)\\ x=2+\sqrt{24}\ \ (L)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2-\sqrt{24}\end{array}\right..$$

- Vậy nghiệm phương trình là $S=\left\{2-\sqrt{24};\ 2\right\}$.

<u>Bài 103.</u> Đại học Sư Phạm Hà Nội khối A năm 2000

Tìm m để $\forall x\in[0;2]$ đều thỏa mãn bất phương trình:

$\log_2\sqrt{x^2-2x+m}+4\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\le 5 \qquad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x^2-2x+m>0$.

- Đặt $t=\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\ge 0$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\ge 0\\ t^2+4t-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\ge 0\\ -5\le t\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+m\ge 1\\ x^2-2x+m\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\ge 1-m\\ x^2-2x\le 4-m\end{cases}\quad\left(**\right).$$

- Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-2x,\ \forall x\in\left[0;2\right]$.

  Ta có: $f'\left(x\right)=2x-2$. Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'\left(x\right)$			$-$	0	$+$		
$f\left(x\right)$		0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	

- Dựa vào bảng biến thiên và $\left(**\right)\Rightarrow\begin{cases}1-m\le -1\\ 4-m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 2\\ m\le 4\end{cases}\Leftrightarrow 2\le m\le 4$.

- Vậy $m\in\left[2;4\right]$ thỏa yêu cầu bài toán.

<u>Bài 104.</u> Đại học Sư Phạm Hà Nội khối B, D năm 2000

Giải bất phương trình: $3^{2x}-8.3^{x+\sqrt{x+4}}-9.9^{\sqrt{x+4}}>0\qquad\left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x+4\ge 0\Leftrightarrow x\ge -4\Rightarrow$ Tập xác định: $D=\left[-4;+\infty\right)$.

- Chia hai vế cho $9^{\sqrt{x+4}}=3^{2\sqrt{x+4}}>0$, ta được:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 3^{2\left(x-\sqrt{x+4}\right)}-8.3^{x-\sqrt{x+4}}-9>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=3^{x-\sqrt{x+4}}>0\\ t^2-8t-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3^{x-\sqrt{x+4}}>0\\ \left[\begin{array}{l}t<-1\\ t>9\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=3^{x-\sqrt{x+4}}>9\Leftrightarrow x-\sqrt{x+4}>2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+4}<x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0\\ x+4\ge 0\\ x+4<\left(x-2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x>5.$$

- Kết hợp tập xác định, tập nghiệm bất phương trình là $S=\left(5;+\infty\right)$.

<u>Bài 105.</u> Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 2000

Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_9\left(3x^2+4x+2\right)+1}>\log_3\left(3x^2+4x+2\right)\qquad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $3x^2+4x+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Đặt $t=\log_3\left(3x^2+4x+2\right)$, lúc đó:

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}t+1}>t\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}t}>t-1\Leftrightarrow\begin{cases}t-1<0\\ \frac{1}{2}t>0\end{cases}\vee\left[\begin{array}{l}t-1\ge 0\\ \frac{1}{2}t>\left(t-1\right)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le t<2$$

$$\Leftrightarrow 0\le\log_3\left(3x^2+4x+2\right)<2\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4x+2\ge 1\\ 3x^2+4x+2<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4x+1\ge 0\\ 3x^2+4x-7<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\le x<1\ \vee\ -\frac{7}{3}<x\le-1.$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{7}{3};-1\right]\cup\left[-\frac{1}{3};1\right)$.

Bài 106. **Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 khối A năm 2000**

Tìm tất cả các số cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-\left(y+4\right)}$ và $4\left|y\right|-\left|y-1\right|+\left(y+3\right)^2\le 8$.

Bài giải tham khảo

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ ta phải giải hệ : $\begin{cases}5^{-\left(y+4\right)}=3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5} & \left(1\right)\\ 4\left|y\right|-\left|y-1\right|+\left(y+3\right)^2\le 8 & \left(2\right)\end{cases}$
- Từ $\left(1\right)\Leftrightarrow 5^{-\left(y+4\right)}=3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}\ge 3^{-\log_3 5}=5^{-1}\Leftrightarrow-\left(y+4\right)\ge-1\Leftrightarrow y\le-3\quad\left(3\right)$.
- Kết hợp với $\left(2\right),\left(3\right)$, ta được: $\begin{cases}y\le-3\\ -4y+y-1+\left(y+3\right)^2\le 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le-3\\ -3\le y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow y=-3$.
- Thay $y=-3$ vào $\left(1\right)$ ta được: $\left(1\right)\Leftrightarrow 3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-1}$

$$\Leftrightarrow\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5=\log_3 5^{-1}\Leftrightarrow\left|x^2-2x-3\right|=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right..$$

- Vậy nghiệm của hệ là $S=\left\{\left(-1;-3\right);\left(3;-3\right)\right\}$.

Bài 107. **Đại học Kiến Trúc Hà Nội – Hệ chuyên ban năm 2000**

Giải phương trình: $\log_7 x=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)\qquad\left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ \sqrt{x}+2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0\Rightarrow$ Tập xác định : $D=\left(0;+\infty\right)$.
- Đặt $\log_7 x=t\Leftrightarrow x=7^t$. Lúc đó : $\left(*\right)\Leftrightarrow t=\log_3\left(\sqrt{7^t}+2\right)\Leftrightarrow t=\log_3\left(7^{\frac{t}{2}}+2\right)$

$$\Leftrightarrow 3^t = 3^{\log_3\left(7^{\frac{t}{2}}+2\right)} \Leftrightarrow 3^t = 7^{\frac{t}{2}} + 2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t = f\left(t\right).$$

- Xét hàm số $f\left(t\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(t\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t.\ln\frac{\sqrt{7}}{3} + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^t.\ln\frac{1}{3} < 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và có $f\left(2\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$. Vì vậy $f\left(t\right) = f\left(2\right) \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49$.

- So với tập xác định, nghiệm của phương trình là $x = 49$.

<u>Bài 108.</u> Đại học Ngoại Thương khối A cơ sở 2 – Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Giải bất phương trình: $\log_2\left(2^x + 1\right) + \log_3\left(4^x + 2\right) \le 2 \qquad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} 2^x + 1 > 0 \\ 4^x + 2 > 0 \end{cases}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

- Xét hàm số $f\left(x\right) = \log_2\left(2^x + 1\right) + \log_3\left(4^x + 2\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right) = \frac{2^x\ln 2}{\left(2^x+1\right)\ln 2} + \frac{4^x\ln 4}{\left(4^x+1\right)\ln 3} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f\left(x\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f\left(0\right) = \log_2 2 + \mathrm{lo}_3 3 = 2$. Do đó: $\forall x \le 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) \le f\left(0\right) \Leftrightarrow x \le 0$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty;0\right]$.

<u>Bài 109.</u> Đại học Ngoại Thương khối D năm 2000

Giải phương trình : $\log_3\left(x^2 + x + 1\right) - \log_3 x = 2x - x^2 \qquad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow$ Tập xác định $D = \left(0;+\infty\right)$.

$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right) = 2x - x^2 \Leftrightarrow \log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 1 - \left(x-1\right)^2 \quad \left(1\right)$.

- Ta có: $\forall x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} + 1 \ge 3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) \ge \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) \ge 1$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \quad \left(2\right)$.

- Mặt khác: $\forall x > 0$ thì $\left(x-1\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\left(x-1\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow 1-\left(x-1\right)^2 \le 1$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = 1 \quad \left(3\right)$.

- Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right) \Rightarrow \begin{cases} \log_3\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right) = 1-\left(x-1\right)^2 \\ \log_3\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right) \ge 1 \\ 1-\left(x-1\right)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right) = 1 \\ 1-\left(x-1\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Bài 110. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế khối D năm 2000

Giải phương trình :

$\log_2\left(x^2+x+1\right)+\log_2\left(x^2-x+1\right) = \log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right) \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-x+1>0 \\ x^4+x^2+1>0 \\ x^4-x^2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2\left[\left(x^2+1\right)+x\right]\left[\left(x^2+1\right)-x\right] = \log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[\left(x^2+1\right)^2-x^2\right] = \log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^4+x^2+1\right) = \log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^4-x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x^4-x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \pm 1.$$

- Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \left\{-1;0;1\right\}$.

Bài 111. Đại học Kinh Tế Quốc Dân Hà Nội khối A năm 2000

Giải bất phương trình : $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \le 0 \quad \left(*\right)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0 \\ -2x^2+8x-6 \ge 0 \\ \dfrac{x}{5}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \ \vee \ x \ge 3 \\ 1 \le x \le 3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

- Với $x = 1 : \left(*\right) \Leftrightarrow 0 \le 0$: thỏa. Do đó, phương trình có một nghiệm $x = 1$.

- Với $x = 3 : (*) \Leftrightarrow \log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \le 0$: không thỏa do $\log_5 \frac{3}{\sqrt[3]{5}} > \log_5 1 = 0$.
- Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm là $x = 1$.

Bài 112. Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 2000

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ (4y)^{\log_8 y} + y^{\log_8 4y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y^{\log_8 4y} + y^{\log_8 4y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y^{\log_8 4y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \log_8 4y = \log_y 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \log_8 4 + \log_8 y = \frac{1}{\log_2 y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2 y = \frac{1}{\log_2 y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 y = 1 \\ \log_2 y = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{1}{8} \end{array}\right. \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Vậy tập nghiệm của hệ là $S = (x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8} \right), (8; 2) \right\}$.

Bài 113. Đại học Mỏ – Địa Chất Hà Nội năm 2000

Giải và biện luận theo tham số thực a hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + a = 1 & (1) \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 & (2) \end{cases}$

Bài giải tham khảo

- Từ $(1) \Rightarrow y = 1 - a - x$. Thay vào (2), ta được : $2^{a^2}.4^{x+1-a-x-x(1-a-x)} = 2$

$$\Leftrightarrow 2^{a^2}.4^{1-a-x+xa+x^2} = 2 \Leftrightarrow 2^{2(1-a-x+xa+x^2)} = 2^{1-a^2} \Leftrightarrow 2(1 - a - x + xa + x^2) = 1 - a^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(a-1)x + (a-1)^2 = 0 \quad (3).$$

- Lập $\Delta' = (a-1)^2 - 2(a-1)^2 = -(a-1)^2 \le 0$.
- Với $a \ne 1 : \Delta' < 0 \Leftrightarrow (3)$: vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Với $a = 1 : (3) \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$.

- Vậy $\begin{cases} a \neq 1: \text{Hệ phương trình vô nghiệm.} \\ a = 1: \text{Hệ phương trình có nghiệm } x = y = 0. \end{cases}$

Bài 114. **Đại học Luật – Đại học Xây Dựng Hà Nội năm 2000**

Giải bất phương trình : $\dfrac{\lg \dfrac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0 \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} \dfrac{5+x}{5-x} > 0 \\ 2^x - 3x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5 \\ x \neq 1 \vee x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định: $D = (-5;5) \setminus \{1;3\}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \dfrac{5+x}{5-x} > 0 \\ 2^x - 3x + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \lg \dfrac{5+x}{5-x} < 0 \\ 2^x - 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5+x}{5-x} > 1 \\ 2^x < 3x + 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{5+x}{5-x} < 1 \\ 2^x > 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{5-x} > 0 \\ x < 1 \ \vee \ x > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{2x}{5-x} < 0 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5 \\ x < 1 \ \vee \ x > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \vee x > 5 \\ 1 < x < 3 \end{cases}.$$

- Kết hợp với tập xác định, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-5;0) \cup (1;3)$.

Bài 115. **Đại học Y Hà Nội năm 2000**

Giải các phương trình sau

1/ $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1$. 2/ $\lg^4 (x-1)^2 + \lg^2 (x-1)^3 = 25$.

Bài giải tham khảo

1/ Giải phương trình : $2^{3x} - 6.2^x - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^x} = 1 \quad (1)$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow 2^{3x} - 6.2^x - \frac{8}{2^{3x}} + \frac{12}{2^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[(2^x)^3 - \frac{8}{(2^x)^3}\right] - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) - 1 = 0 \quad (*).$$

- Đặt $t = 2^x - \dfrac{2}{2^x}$.

$$\Rightarrow t^3 = (2^x)^3 - 3.(2^x)^2.\frac{2}{2^x} + 3.2^x.\frac{4}{(2^x)^2} - \frac{8}{(2^x)^3} \Rightarrow (2^x)^3 - \frac{8}{(2^x)^3} = t^3 + 6t.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 6t - 6t = 1 \\ t = 2^x - \dfrac{2}{2^x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2^x - \dfrac{2}{2^x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -1 \ (L) \\ 2^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Vậy nghiệm phương trình là $x = 1$.

2/ Giải phương trình : $\lg^4 (x-1)^2 + \lg^2 (x-1)^3 = 25 \quad (2)$

- Điều kiện : $\begin{cases}\left(x-1\right)^2>0\\ \left(x-1\right)^3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1\neq 0\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow x>1 \Rightarrow$ Tập xác định $D=\left(1;+\infty\right)$.

$\left(2\right) \Leftrightarrow \left[2\lg\left|x-1\right|\right]^4+\left[3\lg\left(x-1\right)\right]^2-25=0 \Leftrightarrow 16\lg^4\left(x-1\right)+9\lg^2\left(x-1\right)-25=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}16t^2+9t-25=0\\ t=\lg^2\left(x-1\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1 \vee t=-\dfrac{25}{16}\ \left(L\right)\\ t=\lg^2\left(x-1\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \lg^2\left(x-1\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=11\\ x=\dfrac{11}{10}\end{array}\right..$$

- Kết hợp tập xác định, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{11}{10};11\right\}$.

Bài 116. Đại học Y Thái Bình năm 2000

Giải bất phương trình : $\log_2 x+\log_{2x} 8\leq 4 \qquad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases}x>0\\ 0<2x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Tập xác định : $D=\left(0;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{\log_8 2x}-4\leq 0 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{\frac{1}{3}\left(1+\log_2 x\right)}-4\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{t^2-3t-1}{t+1}\leq 0\\ t=\log_2 x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t<-1 \ \vee\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\leq t\leq \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ t=\log_2 x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-1\\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\leq \log_2 x\leq \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \ \vee\ 2^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}\leq x\leq 2^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}.$$

- Kết hợp với tập xác định, tập nghiệm của hệ là $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(2^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}};\ 2^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\right)$.

Bài 117. Đại học Y Hải Phòng – Hệ chuyên ban năm 2000

Tìm x để : $\log_2\left(a^2x^2-5ax+3+\sqrt{5-x}\right)=\log_{2+a^2}\left(5-\sqrt{x-1}\right) \quad \left(*\right)$ luôn đúng $\forall a\in\mathbb{R}$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện cần : Nếu hệ thức đúng $\forall a$ thì phải đúng với $a=0$.

  Lúc đó : $\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2\left(3+\sqrt{5-x}\right)=\log_2\left(5-\sqrt{x-1}\right) \Leftrightarrow 3+\sqrt{5-x}=5-\sqrt{x-1}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{\left(5-x\right)\left(x-1\right)}=4 \Leftrightarrow x=5 \ \vee\ x=1.$$

- Điều kiện đủ :

  Lúc $x=1$: $\left(*\right) \Leftrightarrow \log_2\left(a^2-5a-5\right)=\log_{2+a^2} 5$. Hiển nhiên không thỏa mãn với

  $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \qquad \left(1\right)$.

Lúc $x = 5 : (*) \Leftrightarrow \log_2(25a^2 - 25a + 3) = \log_{2+a^2} 3$. Hiển nhiên không thỏa mãn với

$$\frac{5-\sqrt{13}}{10} < a < \frac{5+\sqrt{13}}{10} \qquad (2).$$

- Từ $(1),(2) \Rightarrow$ không có giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 118. Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội – Hệ chưa phân ban năm 2000

1/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 \\ xyz = 64 \end{cases}$ với ba số : $\log_y x,\ \log_z y,\ \log_x z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

2/ Cho phương trình : $(m+3)16^x + (2m-1)4^x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

<u>Bài giải tham khảo</u>

1/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 \\ xyz = 64 \end{cases}$ $(*)$ với ba số : $\log_y x,\ \log_z y,\ \log_x z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân.

- Điều kiện: $1 \neq x, y, z > 0$.
- Do $\log_y x,\ \log_z y,\ \log_x z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân nên ta có:

$$\log^2{}_z y = \log_y x.\log_x z \Leftrightarrow \log^2{}_z y = \log_y z \Leftrightarrow \log^2{}_z y = \frac{1}{\log_z y} \Leftrightarrow \log^3{}_z y = 1 \Leftrightarrow z = y.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2y^2 \\ xy^2 = 64 \\ 1 \neq x, y, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^3 = 64 \\ 1 \neq x, y, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 4.$$

- Vậy nghiệm của hệ là $(x;y;z) = (4;4;4)$.

2/ Cho phương trình : $(m+3)16^x + (2m-1)4^x + m + 1 = 0 \quad (*)$. Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Đặt $t = 4^x > 0$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow f(t) = (m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0 \quad (**)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$ và t_1, t_2 là hai nghiệm của $(**)$
- Để $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 0 < 4^{x_1} < 1 < 4^{x_2} \Leftrightarrow 0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3).f(1) < 0 \\ (m+3)(m+1).f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(4m+3) < 0 \\ (m+3)(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{3}{4}.$$

- Vậy $m \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 119. Đại học Đà Nẵng năm 2000

Giải bất phương trình : $|1 + \log_x 2000| < 2 \qquad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$(*) \Leftrightarrow -2 < 1 + \log_x 2000 < 2 \Leftrightarrow -3 < \log_x 2000 < 1 \quad (**)$

- Trường hợp 1 : $x > 1 : (**) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{x^3} < 2000 < x \end{cases} \Leftrightarrow x > 2000$.

- Trường hợp 2 : $0 < x < 1 : (**) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^3} > 2000 > x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2000}}$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2000}}\right) \cup (2000; +\infty)$.

Bài 120. Đại học Huế khối A, B – Hệ chuyên ban năm 2000

Giải phương trình : $x + \log_2(9 - 2^x) = 3 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện $9 - 2^x > 0$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 2^x + \dfrac{8}{2^x} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 8 = 0 \\ t = 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \ \vee \ t = 8 \\ t = 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = 0$ và $x = 3$.

Bài 121. Đại học Huế khối D, R, R – Hệ chuyên ban năm 2000

Giải phương trình : $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = (1; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) + \log_2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1) = 1$

$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- So với tập xác định, nghiệm của phương trình là : $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Bài 122. Đại học Sư Phạm Vinh khối D, G, M năm 2000

Giải phương trình : $(x - 1)\log_5 3 + \log_5(3^{x+1} + 3) = \log_5(11.3^x - 9) \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $3^{x+1} + 3 > 0 \ \wedge \ 11.3^x - 9 > 0$.

$(*) \Leftrightarrow \log_5 3^{x-1} + \log_5(3^{x+1} + 3) = \log_5(11.3^x - 9)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[3^{x-1}.(3^{x+1} + 3)\right] = \log_5(11.3^x - 9) \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x = 11.3^x - 9$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 10.3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

- So với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = 0,\ x = 2$.

Bài 123. **Đại học Công Đoàn năm 2000**

Giải phương trình : $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \dfrac{4}{3} \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} \sqrt[3]{x} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow$ Tập xác định : $D = (0;+\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2 x + \sqrt[3]{\log_2 x} - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[3]{\log_2 x} \Rightarrow t^3 = \log_2 x \\ \dfrac{1}{3}t^3 + t - \dfrac{4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = t^3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

- So với tập xác định, nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Bài 124. **Đại học Thủy Lợi Hà Nội – Hệ chưa phân ban năm 2000**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \dfrac{3x}{2} \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \dfrac{2y}{3} \end{cases} \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x > 0,\ y > 0$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 3^x + \log_2 y = \log_2 2^y + \log_2 \dfrac{3x}{2} \\ \log_3 12^x + \log_3 x = \log_3 3^y + \log_3 \dfrac{2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \left(3^x.y\right) = \log_2 \left(2^y.\dfrac{3x}{2}\right) \\ \log_3 \left(12^x.x\right) = \log_2 \left(3^y.\dfrac{2y}{3}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x.y = 2^y.\dfrac{3x}{2} & (1) \\ 3^y.\dfrac{2y}{3} = 12^x.x & (2) \end{cases} \overset{\frac{(1)}{(2)}}{\Leftrightarrow} \dfrac{3^x}{3^y}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{2^y}{12^x}.\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 36^x = 6^y \Leftrightarrow 6^{2x} = 6^y \Leftrightarrow y = 2x$.

- Thay $y = 2x$ vào (1), ta được : $(1) \Leftrightarrow 3^x.2x = 2^{2x}.\dfrac{3x}{2} \Leftrightarrow 3^{x-1} = 4^{x-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} = 1$

  $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$.

- Vậy nghiệm của hệ là $S = (x;y) = \left\{(1;2)\right\}$.

Bài 125. **Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 2000**

Giải phương trình : $\log_9 \left(x^2 - 5x + 6\right)^2 = \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x-1}{2} + \log_3 \left|x - 3\right| \qquad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \vee x \neq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = (1;+\infty) \setminus \left\{2;3\right\}$.

$(*) \Leftrightarrow \log_3 \left|x^2 - 5x + 6\right| = \log_3 \dfrac{x-1}{2} + \log_3 \left|x - 3\right|$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\left|x-2\right|.\left|x-3\right|\right) = \log_3\frac{x-1}{2} + \log_3\left|x-3\right|$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left|x-2\right| + \log_3\left|x-3\right| = \log_3\frac{x-1}{2} + \log_3\left|x-3\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|x-2\right| = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2\left(x-2\right) = -x+1 \\ 2\left(x-2\right) = x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = 3 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với tập xác định, nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5}{3}$.

Bài 126. Đại học Tây Nguyên khối A, B năm 2000

Cho bất phương trình : $\sqrt{\log_2 x + a} > \log_2 x$ (với a là tham số).

1/ Giải bất phương trình khi $a = 1$.

2/ Xác định a để bất phương trình có nghiệm.

Bài giải tham khảo

1/ Khi $a = 1$. Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x + 1} > \log_2 x \quad \left(*\right)$

- Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t+1} > t \\ t = \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0 \\ t+1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ t+1 > t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le t < 0 \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - t - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \log_2 x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left[-1;\ 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

2/ Xác định a để bất phương trình $\sqrt{\log_2 x + a} > \log_2 x \quad \left(**\right)$ có nghiệm.

- Đặt $t = \log_2 x$. Lúc đó : $\left(**\right) \Leftrightarrow \sqrt{t+a} > t \quad \left(1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0 \\ t+a \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ t+a > t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0 \\ t \ge -a \end{cases} \quad \left(2\right) \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - t - a < 0 \end{cases} \quad \left(3\right) \end{array}\right.$.

- Để bất phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left(1\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left(2\right)$ hoặc $\left(3\right)$ có nghiệm.

- Xét hệ phương trình $\left(3\right)$: $\begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - t - a < 0 \quad \left(3'\right) \end{cases}$.

  Ta có: $\left(3'\right) \Leftrightarrow f\left(t\right) = t^2 - t < a$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ trên $[0;+\infty)$. Ta có: $f'(t) = 2t - 1$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm thì $a > -\frac{1}{4}$.

<u>Bài 127.</u> Đại học Dân Lập Phương Đông khối A năm 2000

Giải bất phương trình : $\left(\sqrt{5}+1\right)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3.\left(\sqrt{5}-1\right)^{-x^2+x} \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Nhận xét : $\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right) = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+1\right)^{-x^2+x}.\left(\sqrt{5}-1\right)^{-x^2+x} = 2^{-x^2+x}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2} + 2.\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2}.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} - 2.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} - \left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2} - \left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2}\right] + 2.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2}\left[\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2} - 2.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2}\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2} - \left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2}\right]\left[1 + 2.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2}\right] < 0 \quad (1).$$

- Ta có: $\begin{cases} \sqrt{5}+1 > \sqrt{5}-1 \\ \left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{5}+1\right)^{x-x^2} - \left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} > 0 \\ 1 + 2.\left(\sqrt{5}-1\right)^{x-x^2} > 1 > 0 \end{cases} \quad (2).$
- Từ $(1),(2) \Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

<u>Bài 128.</u> Đại học Dân Lập Hùng Vương ban B năm 2000

Giải bất phương trình : $\log_{x^2}(4x+5) \le 1 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện : $\begin{cases} 1 \ne x^2 > 0 \\ 4x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \vee x \ne 1 \\ x > -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$ Tập xác định : $D = \left(-\frac{5}{4};+\infty\right) \setminus \{0;1\}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_{|x|}\left(4x+5\right) \le 1 \Leftrightarrow \log_{|x|}\left(4x+5\right) \le 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<|x|<1 \\ 4x+5 \ge x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} |x|>1 \\ 4x+5 \le x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 5 \\ x \le -1 \vee x \le 5 \end{array}\right..$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm là : $x \in \left(-\frac{5}{4};-1\right) \cup \left(-1;0\right) \cup \left(0;1\right) \cup \left[5;+\infty\right)$.

Bài 129. **Học Viện Chính Trị Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh – Hệ chưa phân ban năm 2000**

Giải phương trình : $4x^2 + x.3^x + 3^{1+x} = 2x^2.3^x + 2x + 6 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \left(4x^2 - 2x^2.3^x\right) + \left(x.3^x - 2x\right) + \left(3.3^x - 6\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(2-3^x\right) - x\left(2-3^x\right) - 3\left(2-3^x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2-3^x\right)\left(2x^2-x-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-3^x=0 \\ 2x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 2 \\ x=-1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=-1 \vee x=\log_3 2 \vee x=\frac{3}{2}$.

Bài 130. **Đại học khối B năm 2008**

Giải bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $\frac{x^2+x}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-1 \\ x>0 \end{array}\right.$.

$(*) \Leftrightarrow \log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < \log_{0,7} 1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$.

- Kết hợp với điề kiện, tập nghiệm của bất phương trình là : $x \in \left(-4;-3\right) \cup \left(8;+\infty\right)$.

Bài 131. **Đại học khối A năm 2006**

Giải phương trình : $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0 \quad (*)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 3+4.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2.\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}>0 \\ 2t^{3}+t^{3}-4t-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{2} \\ t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=-1 \ \left(L\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=1.$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 132. **Đại học khối D năm 2003**

Giải phương trình : $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3 \qquad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 2^{x^2-x}-4.2^{-\left(x^2-x\right)}-3=0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x}-4.\frac{1}{2^{x^2-x}}-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x^2-x}>0 \\ t-4.\frac{1}{t}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2^{x^2-x}>0 \\ t^2-3t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2^{x^2-x}=-1 \ \left(L\right) \\ t=2^{x^2-x}=4=2^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1,\ x=2$.

Bài 133. **Dự bị 2 – Đại học khối B năm 2006**

Giải phương trình : $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0 \qquad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 3^{2\left(x^2+x-1\right)}-\frac{10}{3}.3^{x^2+x-1}+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3^{x^2+x-1}>0 \\ 3t^2-10t+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3^{x^2+x-1}=3=3^1 \\ t=3^{x^2+x-1}=\frac{1}{3}=3^{-1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=1 \\ x^2+x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \vee x=-2 \\ x=0 \vee x=-1 \end{array}\right..$$

- Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x=-2,\ x=-1,\ x=0,\ x=1$.

Bài 134. **Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2003**

Cho hàm số $f\left(x\right)=x\log_x 2, \quad \left(x>0, x\neq 1\right)$. Tìm $f'\left(x\right)$ và giải bất phương trình $f'\left(x\right)\leq 0$.

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $x>0,\ x\neq 1$.

- Ta có : $f\left(x\right)=x\log_x 2=\dfrac{x\ln 2}{\ln x} \Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{\ln 2.\ln x-\frac{1}{x}.x\ln 2}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln 2\left(\ln x-1\right)}{\ln^2 x}$.

- Giải $f'\left(x\right)=\dfrac{\ln 2\left(\ln x-1\right)}{\ln^2 x}\leq 0 \Leftrightarrow \ln x-1\leq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$.

- So với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là : $x\in\left(0;e\right]\setminus\left\{1\right\}$.

Bài 135. **Dự bị 2 – Đại học khối D năm 2003**

Giải phương trình : $\log_5\left(5^x-4\right)=1-x \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện : $5^x-4>0$.

☞ **Cách giải 1**. Đặt ẩn phụ.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow 5^x-4=5^{1-x}\Leftrightarrow 5^x-5.\frac{1}{5^x}-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5^x>0\\ t^2-4t-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5^x=-1\\ t=5^x=5\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1.$$

- Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

☞ **Cách giải 2**. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

- Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình $\left(*\right)$.
- Hàm số $f\left(x\right)=\log_5\left(5^x-4\right)$: là hàm số đồng biến.
- Hàm số $g\left(x\right)=1-x$: là hàm số nghịch biến.
- Do đó, $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\left(*\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 136. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối A năm 2005**

Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{\log_4\left(x^2+3x\right)} < \dfrac{1}{\log_2\left(3x-1\right)}$.

Bài 137. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối B năm 2005**

Giải bất phương trình : $\log_2\left(x+1\right) + \log_{x+1} 2 \ge \dfrac{5}{2} \qquad (*)$

Bài 138. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối D1 năm 2005**

Giải bất phương trình : $\left(4^x + 2^x - 2\right)\log_2\left(2x-1\right) \ge 0 \qquad (*)$

Bài 139. **Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối H năm 2005**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \lg^2 y = \lg^3 x - 4\lg^2 x + 7\lg x \\ \lg^2 x = \lg^3 y - 4\lg^2 y + 7\lg y \end{cases}$.

Bài 140. **Cao đẳng Quãng Ninh khối A năm 2005**

Giải bất phương trình : $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \dfrac{x^3}{8} + 9\log_2 \dfrac{32}{x^2} \le 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x \qquad (*)$

Bài 141. **Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 2001**

Giải bất phương trình : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2}{2} + 2^{\log_2 x - 1}\right) + 3\right]} \ge 1 \qquad (*)$

Bài 142. **Đại học Thương Mại năm 2001**

Tìm m để phương trình : $\left(m-1\right)\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x-2\right) - \left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(x-2\right) + m - 1 = 0 \qquad (*)$ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện : $2 < x_1 \le x_2 < 4$.

Bài 143. **Học Viện Quan Hệ Quốc Tế khối D năm 2001**

Giải bất phương trình : $\log_x \dfrac{3x+2}{x+2} > 1$

Bài 144. **Đại học Công Đoàn năm 2001**

Giải phương trình : $\log_2\left(4^x + 4\right) = x - \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1} - 3\right)$

Bài 145. **Đại học An Ninh Nhân Dân khối A năm 2001**

Giải phương trình : $\log_2\left(3x-1\right) + \dfrac{1}{\log_{\left(x+3\right)} 2} = 2 + \log_2\left(x+1\right)$

Bài 146. **Đại học An Ninh Nhân Dân khối D năm 2001**

Tìm tập xác định của hàm số : $y = \sqrt{\log_2\left(x^2+2\right).\log_{\left(2-x\right)} 2 - 2}$

Bài 147. **Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 2001**

Tìm m để phương trình : $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m\left(\log_4 x^2 - 3\right)$

Bài 148. Đại học Y Thái Bình năm 2001

Giải bất phương trình : $\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3^x.2x\sqrt{-3x - 5x + 2} + \left(2x\right)^2.3^x$

Bài 149. Đại học Dân Lập Phương Đông năm 2001

Giải phương trình : $\log_3\left(9^{x+1} - 4.3^x - 2\right) = 2x + 1$

Bài 150. Đại học Dân Lập Đông Đô khối A, V năm 2001

Giải phương trình : $\log_x\left[\log_3\left(9^x - 6\right)\right] = 1$

Bài 151. Đại học Thăng Long khối A năm 2001

Giải và biện luận theo tham số a bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + ax + 1\right) < 1$

Bài 152. Đại học Hồng Đức khối A năm 2001

Giải phương trình : $5.3^{2x-1} - 7.3^{x-1} + \sqrt{1 - 6.3^x + 9^{x+1}} = 0$

Bài 153. Đại học Sư Phạm – Đại học Luật Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

Giải phương trình : $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$

Bài 154. Học Viện Chính Trị Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Giải phương trình : $\log_{27}\left(x^2 - 5x + 6\right)^3 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \log_9\left(x - 3\right)^2$

Bài 155. Đại học Huế khối A, B, V năm 2001

Cho hệ phương trình : $\begin{cases}\log_2\left(x + y\right) + \log_a\left(x - y\right) = 1 \\ x^2 - y^2 = a\end{cases}$ với a là số dương khác 1. Xác định a để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất và giải hệ trong trường hợp đó.

Bài 156. Đại học An Giang khối A, B năm 2001

Giải phương trình : $\left|\ln\left(2x - 3\right) + \ln\left(4 - x^2\right)\right| = \left|\ln\left(2x - 3\right)\right| + \left|\ln\left(4 - x^2\right)\right|$

Bài 157. Đại học Đà Lạt khối A, B năm 2001

Xác định m để bất phương trình : $\log_{x-m}\left(x^2 - 1\right) > \log_{x-m}\left(x^2 + x - 2\right)$ có nghiệm.

Bài 158. Đại học Dân Lập Bình Dương năm 2001

Giải phương trình : $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$

Bài 159. Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2001

Giải bất phương trình : $\left(\sqrt{5} + 2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

Bài 160. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Tìm m để bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + m\right) > -3 \quad (*)$ có nghiệm.

Bài 161. **Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1995**

Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} \le 2 \\ x + 3y \ge 2 - \log_4 3 \end{cases}$

Bài 162. **Đại học Ngoại Thương năm 1995**

Giải bất phương trình : $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$

Bài 163. **Đại học Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh năm 1995**

Giải phương trình : $2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$

Bài 164. **Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 1994**

Cho hàm số : $y = \left|\log_{2x^2-1}\left(7 - 2x^2\right) + \log_{7-2x^2}\left(2x^2 - 1\right)\right|$.

1/ Tìm miền xác định của y.

2/ Tìm giá trị nhỏ nhất của y. Tìm tất cả các giá trị của x để y đạt giá trị nhỏ nhất nhất đó.

Bài 165. **Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1994**

1/ Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_2\left(x^2 - 9x + 8\right)}{\log_2\left(3 - x\right)} < 2$.

2/ Giải phương trình : $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 4$.

3/ Cho $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2x} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2x} - 8\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

Bài 166. **Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1994**

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình : $\sqrt{\left(\sqrt{2} + x\right)^m} + \sqrt{\left(\sqrt{2} - x\right)^m} = 2\sqrt{2}$ là hệ quả của phương trình : $\dfrac{\log_2\left(9 - x^3\right)}{\log_2\left(3 - x\right)} = 3$.

Bài 167. **Đại học Ngoại Thương năm 1994**

Giải phương trình : $\log_x\left(x + 1\right) - \lg 4,5 = 0$

Bài 168. **Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 1994**

Cho bất phương trình : $\log_2\left(x^2 + ax\right) \le 2 \qquad (*)$

1/ Giải bất phương trình $(*)$ với $a = 3$.

2/ Tìm giá trị lớn nhất của tham số a để $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình $(*)$

Bài 169. **Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh năm 1993**

Giải bất phương trình : $\log_{3x-x^2}\left(3 - x\right) > 1$.

Bài 170. **Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1993**

Xác định tham số m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình :
$2\log_4\left(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2\right) + \log_{0,5}\left(4x^2 + 2mx - 2m^2\right) = 0$ lớn hơn $0,25$.

Bài 171. **Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1993**

Cho bất phương trình : $\log_2\sqrt{x^2+1}<\log_2\left(ax+a\right)$.

1/ Giải bất phương trình khi $a=-2$.

2/ Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phưng trình có nghiệm.

Bài 172. **Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1993**

Chứng minh rằng với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ta có : $2^{\sin 2x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3x}{2}+1}$.

Bài 173. **Đại học Dân Lập Hùng Vương ban C năm 2000**

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2\left(\log_y x+\log_x y\right)=5\\ xy=8\end{cases}\quad(*)$

Bài 174. **Viện Đại học Mở Hà Nội khối A năm 2000**

Giải phương trình : $2^{\frac{1}{x}}.\left(\sqrt{x^2+4}-x-2\right)=4\sqrt{x^2+4}-4x-8\qquad(*)$

Bài 175. **Đại học Nông Nghiệp I khối B năm 2000**

Giải bất phương trình : $16^{\log_a x}\ge 4+3.x^{\log_a 4}\quad(*)$ với a là tham số.

Bài 176. **Đại học Sư Phạm Vinh khối A, B, E năm 2000**

1/ Giải và biện luận phương trình : $4^{|x|}-2^{|x|+1}-m=0$ (với m là tham số).

2/ Giải bất phương trình : $3^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).3^{x-2}\ge 1$.

Bài 177. **Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D, E năm 2000**

Xác định m để bất phương trình : $4^x-m.2^{x+1}+3-2m<0$ có nghiệm.

Bài 178. **Đại học Giao Thông Vận Tải cơ sở II Tp. Hồ Chí Minh năm 2000**

Giải bất phương trình : $\log_3\sqrt{x^2-x-6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-3}>\log_{\frac{1}{3}}\left(x+2\right)$

Bài 179. **Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 2000**

Cho bất phương trình : $m.9^{2x^2-x}-\left(2m+1\right).6^{2x^2-x}+m.4^{2x^2-x}\le 0$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thỏa điều kiện $|x|\ge\dfrac{1}{2}$.

Bài 180. **Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội – Hệ chuyên ban năm 2000**

Giải phương trình : $\log_4\left(\log_2 x\right)+\log_2\left(\log_4 x\right)=2\quad(*)$

Bài 181. **Đại học Thái Nguyên khối G năm 2000**

Giải phương trình : $\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1\quad(*)$

Bài 182. **Đại học An Ninh Nhân Dân khối D, G năm 2000**

Giải phương trình : $\dfrac{7^{2x}}{100^x}=6.\left(0,7\right)^x+7\quad(*)$

Bài 183. **Đại học Cảnh Sát Nhân Dân khối G – Hệ chuyên ban năm 2000**

Giải phương trình : $\log_3^2\left(x+1\right)+\left(x-5\right)\log_3\left(x+1\right)-2x+6=0 \quad (*)$

Bài 184. **Đại học Thủy Lợi cơ sở II – Hệ chưa phân ban năm 2000**

Giải phương trình : $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0 \quad (*)$

Bài 185. **Học Viện Chính Trị Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh – Ban khoa học xã hội năm 2000**

Giải phương trình : $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}=12 \quad (*)$

Bài 186. **Đại học Thủy Sản đợt 1 năm 2000**

Cho phương trình : $4^x-4m.2^x+2m+2=0$.

1/ Giải phương trình với $m=-1$.

2/ Giải và biện luận phương trình theo tham số m.

Bài 187. **Đại học Thủy Sản đợt 2 năm 2000**

Giải bất phương trình : $\log_4\left(x^2-7x+12\right)^2<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x-2\right)+\log_2\left|x-4\right|-1 \quad (*)$

Bài 188. **Đại học Cần Thơ khối A năm 2000**

Cho phương trình : $\left(x^2-1\right)\lg^2\left(x^2+1\right)-m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}.\log\left(x^2+1\right)+m+4=0$.

1/ Giải phương trình với $m=-4$.

2/ Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thỏa $1\le\left|x\right|\le 3$.

Bài 189. **Đại học Hồng Đức khối A năm 2000**

Giải bất phương trình : $\dfrac{\log_3\left(x+1\right)^4-\log_4\left(x-1\right)^2}{x^2-2x-3}>0$

Bài 190. **Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ khối A, B năm 2000**

Giải phương trình : $\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}=1 \quad (*)$

Bài 191. **Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 2000**

Giải phương trình : $\log_5 x=\log_7\left(x+2\right) \quad (*)$

Bài 192. **Đại học khối D năm 2008**

Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0 \quad (*)$

Bài 193. **Đại học khối A năm 2007**

Giải bất phương trình : $2\log_3\left(4x-3\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)\le 2 \quad (*)$

Bài 194. **Đại học khối D năm 2007**

Giải phương trình : $\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)+2\log_2\dfrac{1}{4.2^x-3}=0 \quad (*)$

Bài 195. **Đại học khối B năm 2006**

Giải bất phương trình : $\log_5\left(4^x + 144\right) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5\left(2^{x-2} + 1\right) \quad (*)$

Bài 196. **Đại học khối D năm 2006**

Giải phương trình : $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \quad (*)$

Bài 197. **Đại học khối B năm 2002**

Giải bất phương trình : $\log_x\left[\log_3\left(9^x - 72\right)\right] \le 1 \quad (*)$

Bài 198. **Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2005**

Tìm tham số m để hệ: $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2005x \le 2005 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Bài 199. **Đại học khối A năm 2008**

Giải phương trình : $\log_{2x-1}\left(2x^2 + x - 1\right) + \log_{x+1}\left(2x - 1\right)^2 = 4 \quad (*)$

Bài 200. **Cao đẳng khối A, B, D năm 2011**

Giải bất phương trình : $4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$